Diplomarbeit im Fach Informatik

Logische Analysen des Periodensatzes von Sharkovsky

Johannes M. Werner
geboren am 30.07.1983 in Erlangen

Institut für Informatik
Lehrstuhl für Informatik 10 (Systemsimulation)
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Betreuer: Dr. Wolfgang Degen

Beginn der Arbeit: 19.10.2007
Abgabe der Arbeit: 21.04.2008

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 21. April 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein wichtiger Teilbereich der Chaostheorie ist die Betrachtung eindimensionaler dynamischer Systeme. Dabei untersucht man das Verhalten von Iteriertenfolgen, die mittels der Definition $x_{n+1} = f(x_n)$ aus einer Funktion gewonnen werden. Da solche Folgen periodisches Verhalten aufweisen können, ist es interessant und sinnvoll, Kriterien zu finden, wann ein Startpunkt x_1 existiert, für den die generierte Folge eine bestimmte Periodizität besitzt. Die ersten Untersuchungen zu diesem Thema wurden von O. M. Sharkovsky in [Sha64] veröffentlicht. Die später als „Satz von Sharkovsky“ bekannt gewordene Vermutung in dieser Arbeit, dass man zu gegebener Periodenlänge auch die Existenz anderer Periodenlänge folgern könne, wurde später von P. Stefan in [Ste77] vollständig bewiesen. Die verwendete Beweistechnik mittels Graphen, die auf den Ideen von Sharkovsky aufbaut, gilt inzwischen als die Standardmethode für diesen Beweis und wird in dieser Arbeit so modifiziert, dass sie auf verschiedene logische Theorien übertragen werden kann.
Die von P. Stefan bewiesene Fassung des Satzes von Sharkovsky besagt:

> Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $f^n(x) = x$ und $f^k(x) \neq x$ für $0 < k < n$. Dann gibt es zu jedem m mit $n \prec m$ einen Punkt $y \in \mathbb{R}$ mit $f^m(y) = y$ und $f^k(y) \neq y$ für $0 < k < m$. Hierbei bezeichnet $\prec$ die durch
>
> $$\begin{gathered} 3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \cdots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 9 \prec \cdots \\ \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 9 \prec \cdots \prec 2^5 \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1 \end{gathered}$$
>
> gegebene Ordnung.

Dieser Satz ist insbesondere eine Verfeinerung des von Li und Yorke in [LY75] bewiesenen Satzes „Drei impliziert Chaos“, da die Zahl Drei das kleinste Element in der angegebenen Ordnung darstellt. Das Theorem von Li und Yorke bezieht sich jedoch zunächst auf einen Chaos-Begriff, der vom heute üblichen topologischen Chaosbegriff abweicht. Der topologische Chaosbegriff ist mit dem verwendeten nicht identisch.

Es stellte sich bei weiteren Untersuchungen außerdem heraus, dass diese Formulierung des Periodensatzes die schärfste mögliche darstellt, also dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion konstruiert werden kann, die einen periodischen Punkt primitiver Ordnung n hat, aber keinen einer kleineren Ordnung.

In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, diesen Satz in die üblichen logischen Theorien einzuordnen. Dazu ist es nötig, den klassischen Standardbeweis zu erweitern und an manchen Stellen so abzuändern, dass dieser leichter auf die anderen Systeme übertragen werden kann. Zusammen mit der Einführung der benötigten Terminologie findet dieses in Kapitel 3 statt. Neben der klassichen Mathematik gibt es als logisch untersuchbare Systeme die Zahlentheorie, in der der Satz nicht formuliert werden kann. Ebenso ist eine Betrachtung in der axiomatischen

Mengenlehre wenig sinnvoll. Als der Untersuchung zugängliche Gebiete verbleiben daher noch die Beweis- und Modelltheorie, die konstruktive Mathematik, sowie die Rekursionstheorie, inklusive der Kompexitätstheorie.

Innerhalb der Beweis- und Modelltheorie sind vor allem die in Kapitel 4 untersuchten Teilsysteme der Arithmetik zweiter Stufe interessant, da sich in diesen Systemen die übliche Mathematik formalisieren und kodieren lässt. In Kapitel 5 wird der Satz innerhalb eines Systems der konstruktiven Analysis auf eine Nichtkonstruktivitätsstufe eingeordnet. Schließlich wird in Kapitel 6 gezeigt, inwiefern mittels der Methoden der Berechenbarkeitstheorie die periodischen Punkte durch eine Turingmaschine bestimmt werden können.

2 Nomenklatur und Notation

In dieser Arbeit werden die folgenden Mengendefinitionen verwendet:

Definition 2.1 Es bezeichne

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ die natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die positiven ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen und
- $\mathbb{Q}^+ := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ die positiven rationalen Zahlen. □

Die reellen Zahle $\mathbb{R}$ können an dieser Stelle nicht einheitlich definiert werden, da diese Menge sich innerhalb der untersuchten logischen Systeme unterscheidet. Die jeweils verwendete Definition wird daher, sofern sie sich von der klassischen unterscheidet, in den einzelnen Kapiteln angegeben. Die klassische Definition erfolgt mittels Cauchy-Folgen, die über metrischen Räumen definiert sind. Die betrachteten metrischen Räume sind in dieser Arbeit aber nur $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ mit der Standandardmetrik $d(x, y) = |x - y|$, wobei mit $|\cdot|$ die Betragsfunktion bezeichnet ist.

Definition 2.2 Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, so dass gilt:

- $\forall a, b \in X : \; d(a, b) \geq 0$, $\forall a, b \in X : \; d(a, b) = 0 \leftrightarrow a = b$
- $\forall a, b \in X : \; d(a, b) = d(b, a)$
- $\forall a, b, c \in X : \; d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ □

Definition 2.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$\forall m, n \geq N : \; d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad .$$

Zwei Cauchy-Folgen $(x_n), (y_n)$ sind gleich, in Zeichen $(x_n) \sim (y_n)$, falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall n \geq N : \; d(x_n, y_n) < \varepsilon \quad .$$

□

Definition 2.4 Die Menge der reellen Zahlen ist mittels der Gleichheit von Cauchy-Folgen durch den Quotienten

$$\mathbb{R} := \{(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid (q_n) \text{ ist Cauchy-Folge}\} / \sim$$

definiert. Hierbei werden die Cauchyfolgen über $(\mathbb{Q}, d)$, mit der Metrik $d(q, r) := |q - r|$, gebildet. □

Die (klassische) Analysis auf dieser Menge wird wie üblich aufgebaut.

Ein wesentlicher Teil in der verwendeten Beweistechnik ist die Untersuchung von Graphen, die den Funktionen zugeordnet werden. Die in dieser Arbeit benutzten Graphen sind stets gerichtet.

Definition 2.5 Ein (gerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten bezeichnet. Hierbei gilt für $(v, w) \in E$ die Kantenrichtung von v nach w. In diesem Fall heißt v mit w verbunden. Ein Weg ist eine endliche Abfolge $v_1 \rightarrow \ldots \rightarrow v_n$ von Knoten, so dass $(v_i, v_{i+1}) \in E$ gilt. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der verwendeten Kanten (hier also $n - 1$). Ein Weg heißt Zyklus, falls $v_1 = v_n$ gilt. In diesem Fall wird der Zyklus als $\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ geschrieben. □

Definition 2.6 Ein Zyklus $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ in einem Graphen heißt *primitiv*, falls er nicht aus Wiederholungen eines echt kürzeren Zyklus besteht. Die Länge eines Zyklus ist die Anzahl der zu diesem gehörigen Kanten. Der Zyklus $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ hat also Länge n. □

Ein Zyklus ist sehr wohl primitiv, wenn er aus z.B. mehrfachem Durchlaufen eines 3-Zyklus und anschließendem Durchlaufen eines 5-Zyklus zustande kommt. Um eine den graphentheoretischen Zyklus von dem gruppentheoretischen Begriff zu unterscheiden, heißt letzterer in dieser Arbeit Bewegung.

Definition 2.7 Eine Bewegung auf einer Menge $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine Funktion $\tau : X \rightarrow X$, für die gilt:

$$\forall i, j \ \big(1 \leq i, j \leq n \rightarrow \exists k (1 \leq k \leq n \wedge \tau^k(x_i) = x_j)\big)$$

Eine Bewegung wird in der üblichen gruppentheoretischen Notation als einzelner voller Zyklus $(y_1, \ldots, y_n)$ dargestellt, wobei die y_i aus einer Permutation der Grundmenge hervorgehen. Hierbei wird jeweils das Element y_i auf das Element y_{i+1} abgebildet.
Die Menge aller Bewegungen einer n-elementigen Menge wird mit $\mathbb{B}_n$ bezeichnet. Wird nichts anderes erwähnt, so operiert $\mathbb{B}_n$ auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. □

$\mathbb{B}_n$ ist zwar eine Teilmenge der symmetrischen Gruppe, aber keine Untergruppe, da sie nicht unter Verknüpfung abgeschlossen ist. Ebenso ist die Identität für $n \neq 1$ kein Element von $\mathbb{B}_n$. Die Menge ist insbesondere so definiert, dass kein Element der Grundmenge durch Anwenden einer Bewegung fixiert wird.
Wie üblich werden die Gaußklammern wie folgt definiert:

Definition 2.8 Sei $x \in \mathbb{R}$. Die kleinste ganze Zahl, die größer als oder gleich x ist, wird mit $\lceil x \rceil$ bezeichnet. Genauso heißt die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich x ist, $\lfloor x \rfloor$. □

Definition 2.9 Seien $X, A \subseteq \mathbb{R}$ beliebige Mengen und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es bezeichne

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in A \cap X\}$$

das Bild von X unter f. □

Definition 2.10 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Die Folge $(f^n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ heißt f-Iteriertenfolge von c. Die Menge $f^*(c) := \{f^n(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt f-Orbit von c. Hierbei wird rekursiv $f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$ und $f^0(x) := x$ definiert. □

Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Funktion gemeint ist, wird das Präfix „f-“ jeweils weggelassen.

Definition 2.11 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Punkt $c \in \mathbb{R}$, für den $f^n(c) = c$ gilt, heißt periodischer Punkt von f der Ordnung n. Gilt zudem

$$\forall m\,(0 < m < n \to \ f^m(c) \neq c) \quad ,$$

so heißt c periodischer Punkt von f der primitiven Ordnung n.
Ein Punkt der Ordnung 1 wird auch Fixpunkt genannt. □

Definition 2.12 (Sharkovsky-Ordnung)
Die Sharkovsky-Ordnung der natürlichen Zahlen $\prec$ ist definiert durch:

$$\begin{gathered} 3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \cdots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec 2\cdot 9 \prec \cdots \\ \prec 2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 7 \prec 2^2\cdot 9 \prec \cdots \prec 2^5 \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1 \end{gathered}$$

Wie üblich bezeichnet $\preceq$ die durch $a \preceq b :\Leftrightarrow a \prec b \vee a = b$ gegebene Relation. □

Offenbar ist der Ordnungstyp der Sharkovsky-Ordnung durch $\omega \cdot \omega + \omega^\star$ gegeben. Benutzt man die durch die Paarung

$$P : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N} \\ (r,p) & \mapsto & 2^r \cdot (2\cdot p + 1) \end{array} \right.$$

gegebene eindeutige Schreibbarkeit der natürlichen Zahlen als Paar von eben solchen, so lässt sich diese Ordnung auch folgendermaßen ausdrücken:

$$P(a,b) \prec P(c,d) :\Leftrightarrow (0 = d \wedge (b = 0 \ \to \ a > c)) \vee (0 < d \wedge (0 < b < d \to a < c))$$

Die Sharkovsky-Ordnung kann ohne Probleme durch $1 \prec 0$ auf ganz $\mathbb{N}_0$ erweitert werden. Allerdings hat die Betrachtung von Punkten mit der Eigenschaft $f^0(x) = x$ keinen Sinn, da sie trivialerweise für alle Punkte und Funktionen gilt.

3 Der klassische Beweis

In diesem Abschnitt wird die für Beweise des Satzes von Sharkovsky notwendige Terminologie und Beweistechnik anhand des klassischen Beweises erläutert. Hierzu wird der Beweis aus [BC92] etwas erweitert und umstrukturiert.
In den nachfolgenden Kapiteln werden einzelne Teile aus diesem Beweis benutzt oder in einer der jeweiligen Logik entsprechenden Form neu formuliert und bewiesen.

Der in der klassischen Mathematik übliche Stetigkeitsbegriff ist wie folgt definiert:

Definition 3.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- stetig in $x \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|x - y| < \varepsilon$ auch $|f(x) - f(y)| < \delta$ folgt,
- stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$, falls f stetig in jedem Punkt von A ist

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie stetig auf A ist. □

Ein weithin bekannter Satz der klassischen Analysis ist der Zwischenwertsatz. Ein Beweis, etwa mittels Intervallschachtelung, findet sich in jedem Analysis-Lehrbuch.

Satz 3.2 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < t < f(b)$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = t$.* □

Ebenso bekannt ist der folgende Satz.

Satz 3.3 (Fixpunktsatz) *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Wenn $I \subseteq f(I)$ gilt, so hat f einen Fixpunkt $z \in I$.* □

Beweis Ohne Einschränkung: $I = [a, b]$ mit $a \neq b$.
Wegen $f(I) \subseteq I$ gibt es Punkte $c, d \in I$ mit $f(c) = a$ und $f(d) = b$. OBdA gilt $c \neq a$ und $d \neq b$.
Falls $c < d$, sei $g(x) := f(x) - x$. Wegen $g(c) < 0 < g(d)$ hat nach dem Zwischenwertsatz g eine Nullstelle $z \in I$. Diese erfüllt $f(z) = z$.
Falls $d < c$ folgt die Behauptung analog mit $g(x) := -f(x) + x$. ■

Lemma 3.4 *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle und f eine stetige Funktion mit $I \subseteq f(J)$. Dann gibt es ein abgeschlossenes Teilintervall $K \subseteq J$ mit $f(K) = I$. K kann minimal gewählt werden, d. h. es gilt $f(\min K), f(\max K) \in \{\min I, \max I\}$ und $x \in K \setminus \{\min K, \max K\} \to f(x) \notin \{\min I, \max I\}$.* □

Beweis Ist I einpunktig, so ist der Beweis trivial.
Sei daher $I = [a, b]$ mit $a \neq b$. Die Menge $\{x \in J |\ f(x) = a\}$ ist wegen $I \subseteq f(J)$ nichtleer.
Außerdem ist sie nach der Stetigkeit von f kompakt und besitzt daher ein Maximum. Definiere $c := \max\{x \in J |\ f(x) = a\}$.

Genauso folgt die Kompaktheit für die Menge $\{x \in J |\ f(x) = b\}$ und damit auch für

$$X := \{x \in J |\ f(x) = b \wedge x > c\} \text{ und } Y := \{x \in J |\ f(x) = b \wedge x < c\}\ .$$

Falls $X \neq \emptyset$ ist, setze $d := \min X$ und $K := [c, d]$. Andernfalls gilt wegen $X \cup Y \neq \emptyset$ auch $Y \neq \emptyset$, womit $d := \max Y$ wohldefiniert ist. In diesem Fall kann man $K := [d, c]$ wählen. Für das so gewonnene K gilt die Behauptung nach Konstruktion. ■

Korollar 3.5 *Seien $I_0, I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle und f eine stetige reelle Funktion mit $1 < k \leq n \to I_k \subseteq f(I_{k-1})$. Dann gibt es ein abgeschlossenes Teilintervall $K \subseteq I_0$ mit $f^k(K) = I_k$, falls $0 \leq k \leq n$. Gilt zudem $I_0 = I_n$, so hat f einen periodischen Punkt der Ordnung n.* □

Beweis Nach Lemma 3.4 gibt es eine kompakte Menge $A_0 \subseteq I_0$ mit $I_1 = f(A_0)$. Sei A_{k-1} definiert. Wegen $I_k \subseteq f^k(A_k)$ und weil mit f auch f^k stetig ist, kann man nach Lemma 3.4 $A_{k+1} \subseteq A_k$ so wählen, dass $f^k(A_k) = I_k$ gilt. Damit folgen die Behauptungen mit $K := A_n$ und nach Satz 3.3. ■

Definition 3.6 Sei f eine Funktion mit periodischen Punkt x der primitiven Ordnung n. Der wie folgt konstruierte gerichtete Graph G heißt der zum Paar (f, x) gehörige Periodengraph.
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} = f^*(x)$ der sortierte Orbit von x, d.h. es gelte $x_i < x_{i+1}$ für alle $1 \leq i < n$. $G = (V, E)$ ist definiert durch

- $V := \{I_1 := [x_1, x_2], \ldots, I_{n-1} := [x_{n-1}, x_n]\}$
- $(I_k, I_j) \in E \Leftrightarrow I_j \subseteq f(I_k)$ □

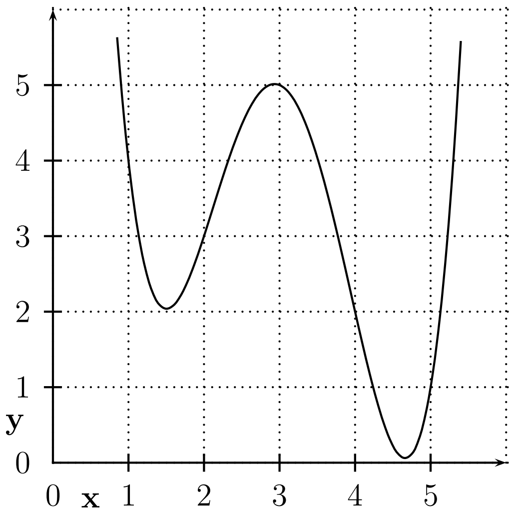


Abbildung 1: $\frac{1}{24}(15 \cdot x^4 - 182 \cdot x^3 + 753 \cdot x^2 - 1234 \cdot x + 744)$

Beispiel 3.7 Die in Abbildung 1 dargestellte Funktion

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{24}(15 \cdot x^4 - 182 \cdot x^3 + 753 \cdot x^2 - 1234 \cdot x + 744) \end{array} \right.$$

hat den periodischen Punkt 1 der Ordnung 5.
Die Iteriertenfolge berechnet sich zu $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 5 \to 1 \to \ldots$,
womit der Orbit durch $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben ist. Dies ergibt den folgenden Graphen:

$$\begin{tikzcd}
{[1,2]} \arrow[d] & {[4,5]} \arrow[l] \\
{[3,4]} \arrow[ur] \arrow[r, bend left] \arrow[loop below] & {[2,3]} \arrow[u] \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 3.8 *Sei f stetig, mit periodischem Punkt x und sei G der zugehörige Periodengraph. Enthält G einen Zyklus der Länge n, so hat f einen periodischen Punkt der Ordnung n. Ist der Zyklus primitiv, so ist auch die Ordnung des periodischen Punktes primitiv.* □

Beweis Sei $\langle I_1, ..., I_n \rangle$ der Zyklus. Nach Konstruktion von G gilt $f(I_i) \subseteq I_{i+1}$. Nach Korollar 3.5 gibt es daher einen periodischen Punkt $y \in I_1$ der Ordnung n.
Wegen $f^i(y) \in I_i$ und der Primitivität des Zyklus folgt die Behauptung. ■

Nach diesem Lemma gehört beispielsweise zu der in Beispiel 3.7 definierten Funktion ein Punkt der Ordnung 3, denn der Zyklus $\langle [2, 3], [3, 4], [3, 4] \rangle$ ist primitiv und hat die Länge 3. Man kann also durch die gewonnenen Graphen in manchen Fällen auch periodische Punkte finden, die eine kleinere Sharkovsky-Ordnung haben.

Lemma 3.9 *Sei $G = (V, E)$ der zu (f, x) gehörende Periodengraph und n die Ordnung von x. Es gibt einen Zyklus $Z = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *Z hat Länge n.*
- *Es gibt einen Endpunkt $x \in v_1$, so dass $f^{k-1}(x) \in v_k$ gilt, falls $1 \leq k \leq n$.*

Ein solcher Zyklus heißt Fundamentalzyklus. □

Beweis Die Existenz folgt unmittelbar aus der Existenz des Orbits $f^*(x)$:
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} := f^*(x)$, mit $x_i < x_{i+1}$.
Sei oBdA $n > 2$ und $v_1 := [x_1, x_2]$ definiert. Seien $v_1, \ldots v_k := [a, b]$ bereits definiert. Wähle $v_{k+1} \subseteq f(v_k)$ derart, dass $f^k(x_1)$ Endpunkt von v_{k+1} ist. Diese Wahl ist möglich, da entweder $f^k(x_1) = f(a)$ oder $f^k(x_1) = f(b)$ gilt.
Da $f^n(x_1) = x_1$ gilt und x_1 minimal ist, gibt es eine Kante von v_{n-1} nach v_0, die genauso gewählt werden kann. ■

Ein Fundamentalzyklus ist im Allgemeinen weder eindeutig bestimmt noch primitiv.

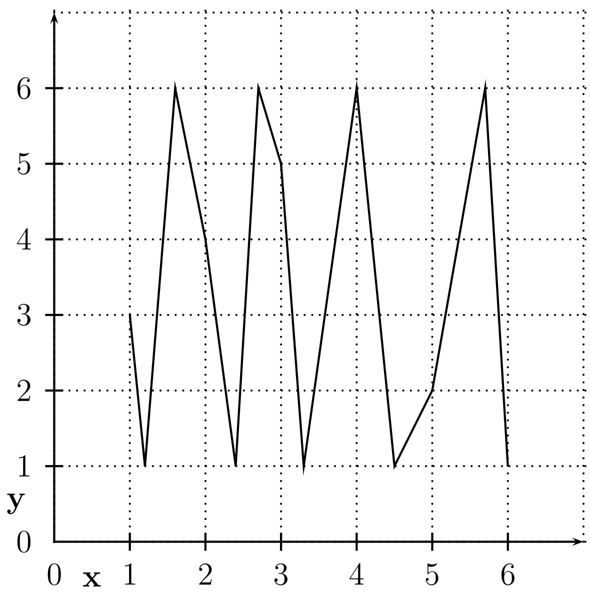


Abbildung 2:

Beispiel 3.10 Betrachtet man die durch Abb. 2 gegebene Funktion mit Iteriertenfolge $1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1 \to \cdots$, so ist der zugehörige Graph vollständig. Daher ist z.B. $([1,2],[3,4],[5,6],[1,2],[3,4],[5,6])$ ein nicht primitiver Fundamentalzyklus. Ebenso ist $([1,2],[3,4],[5,6],[2,3],[4,5],[5,6])$ ein weiterer, aber primitiver, Fundamentalzyklus. □

Das Beispiel illustriert ebenso, dass die in einer Funktion enthaltene Information nur zu einem kleinem Teil gebraucht wird. Genauer reicht es nämlich aus, ihre Wirkung auf dem Orbit des periodischen Punktes und den Orbit selbst zu kennen.

Definition 3.11 Sei $\tau \in \mathbb{B}_n$ eine Bewegung. Der wie folgt konstruierte Graph $G = (V, E)$ heißt τ-*Graph*.

- $V := \{1, \ldots, n-1\}$
- $(i,j) \in E \;:\Leftrightarrow\; \tau(i) \leq j < \tau(i+1) \vee \tau(i+1) \leq j < \tau(i)$ □

Definition 3.12 Sei f stetig mit periodischem Punkt x der primitiven Periode n und $\{x_1, \ldots, x_n\} = f^*(x)$ der Orbit mit $1 \leq i < j \leq n \to x_i < x_j$.
$\tau = \tau_{(f,x)} \in \mathbb{B}_n$ heißt die (f,x) *zugehörende Bewegung*, wenn sie die Wirkung von f auf dem sortierten Orbit beschreibt, d.h.

$$\tau(i) = j :\Leftrightarrow f(x_i) = x_j \quad .$$ □

Es ist klar, dass τ durch $(x_1, f(x_1), f^2(x_1), \ldots f^{n-1}(x_1))$ direkt auf dem Orbit als Grundmenge dargestellt werden kann. Es ist allerdings beweistechnisch sinnvoller, die Menge tatsächlich gemäß ihrer Sortierung auf die Menge $\{1, \ldots, n\}$ zu projizieren.

Lemma 3.13 *Sei f stetig mit periodischem Punkt x der primitiven Periode n. Weiter seien $G = (V_G, E_G)$ der zu (f, x) gehörende Periodengraph und $H = (V_H, E_H)$ der $\tau_{(f,x)}$-Graph.*
Dann gibt es einen injektiven Graphhomomorphismus $\varphi : H \to G$.
Dieser heißt natürliche Einbettung *und erhält die primitiven Zyklen.* □

Beweis Die Fortsetzung von

$$\varphi : \begin{cases} V_H & \to & V_G \\ i & \mapsto & [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

erfüllt die Bedingungen nach Definition. ■

Insbesondere kann H als Teilgraph von G aufgefasst werden und zu jedem Zyklus in H gibt es einen der gleichen Länge in G. Zusammenfassend folgt sofort mit Lemma 3.8 der Satz:

Satz 3.14 *Sei f stetig mit periodischem Punkt x der primitiven Periode n. Gibt es im $\tau_{(f,x)}$-Graphen einen (primitiven) Zyklus der Länge n, so hat f einen periodischen Punkt der (primitiven) Ordnung n.* □

Bemerkung 3.15 Man kann $\tau \in \mathbb{B}_n$ als Funktion $\hat{\tau} : [1, n] \to [1, n]$ auffassen, indem man linear interpoliert:
Für $1 \leq i < n$ und $x \in [i, i+1]$ setzt man

$$\hat{\tau}(x) := (x - i - 1)\tau(i) + (x - i)\tau(i + 1) \quad .$$

Diese Funktion hat den periodischen Punkt 1 der Ordnung n und der zu $(\hat{\tau}, 1)$ gehörende Graph ist isomorph zum τ-Graphen mit natürlichem Isomorphismus

$$\varphi : \begin{cases} \{[1,2], \ldots, [n-1, n]\} & \to & \{1, \ldots, n-1\} \\ [i, i+1] & \mapsto & i \end{cases}$$
□

Lemma 3.16 *Sei $\tau \in \mathbb{B}$.*
Die Funktion $\hat{\tau}$ hat einen periodischen Punkt der Ordnung n genau dann, wenn der τ-Graph einen Zyklus der Länge n hat.
Die Ordnung des Punktes ist genau dann primitiv, wenn der Zyklus primitiv ist. □

Beweis Sei $x \in [1, n]$ ein periodischer Punkt der Ordnung m. O.B.d.A. ist $n \neq m$.
Für $1 \leq i \leq m$ definiere $z_i := [k, k+1]$, falls $\hat{\tau}^{i-1}(x) \in [k, k+1]$.
Nach Definition von $\hat{\tau}$ gilt

$$x \in [l, l+1] \wedge \hat{\tau}(x) \in [h, h+1] \to [h, h+1] \subseteq \hat{\tau}([l, l+1]).$$

Damit ist $\langle z_1, \ldots, z_{m-1} \rangle$ ein Zyklus im zugeordneten Graphen und aufgrund der Isomorphie auch im τ-Graphen.
Sei Z ein nicht primitiver Zyklus der Länge l und $x \in [k, k+1]$ ein zu diesem gehörender periodischer Punkt. x ist Fixpunkt von $g := \hat{\tau}^l$. Weil g eingeschränkt auf $[k, k+1]$ linear ist, ist es auch der einzige. Jeder zu dem Zyklus Z', aus dessen mehrfacher Wiederholung Z besteht, entstandene periodische Punkt ist also gleich x. Damit ist x nicht von primitiver Ordnung.
Die anderen Richtungen folgen aus Lemma 3.14 ■

Es wäre möglich, die Definition des Fundamentalzyklus auf τ-Graphen auf die triviale Weise zu erweitern:
$\varphi(Z)$ ist Fundamentalzyklus $:\Leftrightarrow Z$ ist Fundamentalzyklus.
Leichter handhabbar ist aber die folgende, zu den bisherigen äquivalente Definition.

Definition 3.17 Sei $\tau \in \mathbb{B}_n$ und $G = (V, E)$ der τ-Graph. Ein Zyklus $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ ($z_i \in V$) heißt Fundamentalzyklus (in G), falls gilt:

$$(1 < i \leq n \rightarrow \tau^{i-1}(z_1) \in \{z_i, z_i + 1\}) \vee (1 < i \leq n \rightarrow \tau^{i-1}(z_1 + 1) \in \{z_i, z_i + 1\})$$

□

Lemma 3.18 *Jeder Fundamentalzyklus zerfällt in zwei primitive Zyklen.* □

Beweis Sei $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ ein Fundamentalzyklus im Graphen $G = (V, E)$ zur Bewegung $\tau \in \mathbb{B}_n$. Wegen $|V| = n - 1$ folgt aus dem Schubfachprinzip, dass es Indizes i, j gibt, mit $i \neq j$ und $z_i = z_j$. Damit zerfällt der Zyklus in $Z_1 := \langle z_1, \ldots, z_i, z_{j+1}, \ldots, z_n \rangle$ und $Z_2 := \langle z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1} \rangle$. Weil aber jede Zahl k ($1 \leq k < n$) nur einmal in τ vorkommt, kann jedes z_k höchstens zweimal in Z auftreten. Damit tritt in jedem $Z_{1,2}$ der Knoten z_i genau einmal auf, womit die Zyklen primitiv sind. ■

Lemma 3.19 *Sei $\tau \in \mathbb{B}$ eine Bewegung. Jeder τ-Graph $G = (V, E)$ enthält (mindestens) eine Reflexivkante (1-Zyklus).* □

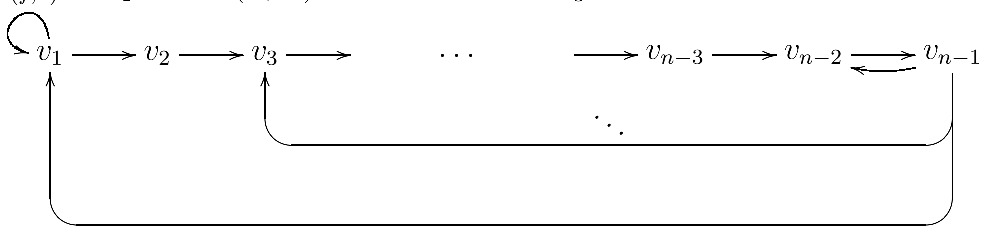
Beweis Setze $j := \min\{k \in \{1, \ldots n\} | \ \tau(k) < k\}$. Offensichtlich gilt $j \neq 1$. Außerdem gilt $\tau(j) \leq j - 1 < \tau(j - 1)$ nach Wahl von j. Also gilt $(j - 1, j - 1) \in E$ nach Definition von E. ■

Lemma 3.20 *Jede stetige Funktion, die einen periodischen Punkt irgendeiner Ordnung* > 1 *hat, besitzt auch einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung* 2 *und einen Fixpunkt.* □

Beweis Sei x ein periodischer Punkt von f mit kleinstmöglicher primitiver Ordnung $n > 2$ und G der $\tau_{(f,x)}$-Graph. Dann zerfällt nach Lemma 3.18 der Fundamentalzyklus in zwei primitive Zyklen der Länge kleiner n. Mindestens einer davon hat eine Länge größer als 1, da $n > 2$ nach Voraussetzung gilt. Nach Lemma 3.8 gibt es damit einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung k mit $k \prec n$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme.
Die zweite Behauptung folgt sofort aus Lemma 3.19 und Satz 3.14. ■

Lemma 3.21 *Sei f stetig, mit periodischem Punkt x ungerader primitiver Ordnung $n > 1$. Außerdem habe f keine periodischen Punkte ungerader Ordnung zwischen* 1 *und* n.

Dann gilt $\tau_{(f,x)} = (v, v \pm 1, v \mp 1, v \pm 2, v \mp 2, \ldots, v \pm \frac{n-1}{2}, v \mp \frac{n-1}{2}$*, wobei* $v := \frac{n+1}{2}$*; der* $\tau_{(f,x)}$*-Graph* $G = (V, E)$ *hat die Darstellung:*



$\square$

Beweis Für $n = 3$ ist der Beweis trivial. Sei also $n > 3$ und bezeichne $\tau := \tau_{(f,x)}$.
Sei Z ein Fundamentalzyklus in G. Nach Lemma 3.18 zerfällt dieser in einen primitiven Zyklus gerader und einen Zyklus ungerader Länge. Da nach Satz 3.14 zu letzterem ein periodischer Punkt primitiver und ungerader Ordnung $< n$ gehört, hat dieser die Länge 1.
OBdA. kann der Zyklus daher als $Z := \langle v_1, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ angenommen werden.
Es gilt $v_i \neq v_j$ für alle $1 < i < j < n$, da andernfalls entweder $\langle v_1, v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{n-1} \rangle$ oder $\langle v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{n-1} \rangle$ ein primitiver Zyklus ungerader Länge $< n$ ist.
Damit ist gezeigt: $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\} = \{1, \ldots, n-1\} \stackrel{\text{Def.}}{=} V$, $(v_1, v_1), (v_{n-1}, v_1) \in E$ und $1 \leq i < n \rightarrow (v_i, v_{i+1}) \in E$.
Ebenso folgt $(v_i, v_j) \notin E$, falls $j > i+1$ oder $j = 1 \wedge i \notin \{1, n-1\}$, da sonst primitive Zyklen ungerader Länge $< n$ existieren würden.
Die Kanten E waren gegeben durch

$$(i,j) \in E \ :\Leftrightarrow \ (\ \tau(i) \leq j < \tau(i+1) \quad \vee \quad \tau(i+1) \leq j < \tau(i)\ )\ .$$

Damit gilt entweder

a) $\tau(v_1) \leq v_{1,2} < \tau(v_1 + 1)$ oder

b) $\tau(v_1 + 1) \leq v_{1,2} < \tau(v_1)$.

Im ersten Fall gilt:
Weil $\tau(v_1) \neq v_1$ ist und v_1 nur mit sich selbst und v_2 verbunden ist, folgt $v_2 = \tau(v_1) = v_1 - 1$ und damit $\tau(v_1 + 1) = v_1 + 1$. Widerspruch!
Also gilt der zweite Fall. Wieder gibt es zwei Möglichkeiten:

- $v_2 < v_1$
- $v_1 < v_2$

Angenommen $v_2 < v_1$. Dann folgt, da von v_1 genau zwei Kanten ausgehen, dass $v_2 = \tau(v_1 + 1) = v_1 - 1$, $\tau(v_1) = v_1 + 1$ und damit $\tau^2(v_1) = v_1 - 1$.
Weil $(v_2, v_3) \in E$ die einzige Kante von v_2 ist, folgt entweder

- $v_3 - 1 = \tau(v_2 + 1)$ oder
- $\tau(v_2 + 1) = v_3$.

Da - wie gezeigt - $\tau(v_2 + 1) = v_1 + 1$ gilt, folgt im ersten Fall durch $v_3 = v_1$ ein Widerspruch. Damit gilt $v_3 = v_1 + 1$.
Die Bewegung τ beginnt also $(v_1, v_3 = v_1 + 1, v_2 = v_1 - 1, ...)$.

Beh: $\tau(v_1 + k) = v_1 - k = v_{2k}$ und $\tau(v_1 - k) = v_1 + k + 1 = v_{2k+3}$,
falls $1 \leq v_1 - k < v_1 + k < n$. Außerdem gilt $v_{2k} < v_1 < v_{2k+1}$.
Bew:

Induktion nach k. Der Fall $k = 1$ ist bereits gezeigt.
Angenommen

$$(v_1, v_3 = v_1 + 1, v_2 = v_1 - 1, \ldots, v_{2k-1} = v_1 + k - 1, v_{2k-2} = v_1 - k + 1, ?)$$

sei gezeigt.
Aus $(v_{2k-1}, v_{2k}) \in E$ folgen wieder zwei Fälle

- $\tau(v_{2k-1}) \leq v_{2k} < \tau(v_{2k-1} + 1)$
- $\tau(v_{2k-1} + 1) \leq v_{2k} < \tau(v_{2k-1})$

Nach I.H. ist $\tau(v_{2k-1}) = v_{2k-2} = v_1 - k + 1$. Im ersten Fall gilt: Da v_{2k} verschieden von den $2(k-1)+1$ bekannten anderen Knoten ist, folgt $v_1 + k - 1 < \tau(v_{2k-1} + 1)$. Damit gäbe es aber Kanten von v_{2k-1} zu jedem Knoten mit kleinerem Index und damit einen primitiven Zyklus der Länge $< n$.

Im anderen Fall folgt analog $v_{2k} = v_1 - k = \tau(v_{2k-1}) - 1$, da ansonsten weitere Vorwärtskanten von v_{2k-1} aus existierten.
Nun die Kante $(v_{2k}, v_{2k+1}) \in E$:

- $\tau(v_{2k}) \leq v_{2k+1} < \tau(v_{2k} + 1)$
- $\tau(v_{2k} + 1) \leq v_{2k+1} < \tau(v_{2k})$

Nach I.H. ist $v_{2k} + 1 = v_1 - k + 1 = v_{2k-2}$

Der erste Fall kann wieder wegen des Auftretens kürzerer Zyklen nicht eintreten.
Im zweiten Fall muss $v_{2k+1} = v_1 + k\tau(v_{2k}) - 1$ gelten, da ansonsten weitere Vorwärtskanten von v_{2k} aus existierten (oder $2k = n - 1$ erreicht ist). Somit folgt die Behauptung.

Damit ist gezeigt, dass $\tau = (v, v+1, v-1, \ldots, v+v-1, v-v+1)$, wobei $v := v_1 = \frac{n+1}{2}$ gesetzt wird.

In Fall b) folgt analog $\tau = (v, v-1, v+1, \ldots, v-v+1, v+v-1)$, falls man $v := v_1 - 1 = \frac{n+1}{2}$ setzt.
In beiden Fällen hat der τ-Graph die beschriebene Form. ■

Interessant im vorhergehenden Beweis ist die Tatsache, dass ausschließlich Eigenschaften von natürlichen Zahlen, genauer die totale Anordenbarkeit, die Vergleichbarkeit und die Definition von Graphen benutzt wurden. Satz und Beweis sind daher ohne Änderung auf die meisten anderen logischen Systeme übertragbar.

Korollar 3.22 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und habe einen periodischen Punkt ungerader, primitiver Ordnung n. Dann hat f einen periodischen Punkt der Ordnung m, für jedes m mit $n \prec m$.* $\square$

Beweis OBdA. sei n minimal in Bezug auf die Sharkovsky-Ordnung. Sei G der $\tau_{(f,x)}$-Graph nach Lemma 3.21.
Fall 1: $m < n$ gerade. Dann ist $\langle v_{n-1}, v_{n-m}, v_{n-m+1}, \ldots, v_{n-2} \rangle$ ein primitiver Zyklus in G der Länge m.
Fall 2: $m > n$: Dann ist $\langle v_1, \ldots, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ (v_1 tritt $n - m + 1$ mal auf) ein primitiver Zyklus in G der Länge m.
In beiden Fällen hat f einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung m nach Lemma 3.8. $\blacksquare$

Lemma 3.23 *Sei x ein periodischer Punkt von f der primitiven Ordnung n und sei $h \in \mathbb{N}$. Dann ist x ein periodischer Punkt von f^h der primitiven Ordnung $\frac{n}{\mathtt{ggT}(n,h)}$. Ist x ein periodischer Punkt von f^h der primitiven Ordnung n, dann ist x auch ein periodischer Punkt von f der primitiven Ordnung $\frac{nh}{d}$, wobei für d sowohl $d|h$ als auch $\mathtt{ggT}(h,d) = 1$ gilt.* $\square$

Beweis Die erste Behauptung ist klar.
Zum Beweis der zweiten: x muss eine primitive Ordnung m haben, wobei $m|nh$ gilt. Also gibt es ein d mit $m = \frac{mh}{d}$. Nach der ersten Behauptung gilt also $\frac{m}{\mathtt{ggT}(h,m)} = \frac{mh}{d}$.
Mit $e := \mathtt{ggT}(h,m)$ folgt $h = de$ und damit $\mathtt{ggT}(de, ne) = e$. $\blacksquare$

Im Beweis des vorhergehenden Lemmas werden keine Eigenschaften von f, wie etwa dass f eine Funktion oder stetig ist, benutzt. Insbesondere ist die bewiesene Aussage eigentlich eine Tatsache, die aus der endlichen Gruppentheorie folgt, indem man Potenzen eines Generators der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_n$ betrachtet. Daher ist auch dieses Lemma ohne Einschränkung in allen in dieser Arbeit betrachteten Systemen ohne Anpassung des Beweises verwendbar, sofern die iterierten Funktionen f^k existieren.

Lemma 3.24 *Sei $\tau \in \mathbb{B}_n$ eine Bewegung und G der τ-Graph. Dann hat G primitive Zyklen der Länge m, falls $n \prec m$.* $\square$

Beweis Nach Lemma 3.16 hat G genau dann einen primitiven Zyklus der Länge m, falls $\hat{\tau}$ einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung m hat. Weiter kann man annehmen, dass $m \neq 1$ gilt, da nach Lemma 3.19 G eine Reflexivkante und damit einen primitiven 1-Zyklus hat. Ebenso kann $n > 2$ angenommen werden.
Die Funktion $\hat{\tau}$ hat bei 1 einen periodischen Punkt primitiver Ordnung n. Sei $n = 2^d \cdot q$, wobei q ungerade und $d > 1$ ist.

Fall 1: $q = 1$. $m = 2^e$, mit $1 \leq e < d$.
Die Funktion $f = \hat{\tau}^{m/2}$ hat nach Lemma 3.23 einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung 2^{d-e+1}. Damit hat sie nach Lemma 3.20 einen periodischen Punkt primitiver Periode 2. Wieder mit Lemma 3.23 hat dieser die primitive Ordnung m für $\hat{\tau}$.

Fall 2: $q > 1$ und $m = 2^d \cdot r$.
Die Funktion $f = \hat{\tau}^{2^d}$ hat nach Lemma 3.23 einen periodischen Punkt y der primitiven Ordnung q und nach Korollar 3.22 also auch einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung r.
Falls $r > q$ ungerade ist, gilt $\texttt{ggT}(2^d, r) = 1$ und damit ist y ein periodischer Punkt von $\hat{\tau}$ primitiver Ordnung m.
Falls r gerade ist, gibt es nach Lemma 3.23 ein $e \leq d$, so dass y bzgl. $\hat{\tau}$ die primitive Ordnung $2^e r$ hat. Falls $e = d$, ist der Beweis fertig. Andernfalls gilt $e < d$ und der Beweis folgt nach Substitution von $n = 2^e r$ aus dem gerade gezeigten, da $m = 2^e(2^{d-e}r)$. ■

Dieser Beweis sieht zunächst wie eine Version des Satzes von Sharkovsky aus, ist aber tatsächlich etwas stärker, da ebenso bewiesen wird, dass man die Zyklen der gesuchten Länge bereits im durch den angegebenen periodischen Punkt definierten $\tau_{(f,x)}$-Graphen findet und keine Umwege über anderweitig konstruierte periodische Punkte und deren Graphen gehen muss. Es folgt demgemäß aus diesem Lemma sofort der Satz von Sharkovsky:

Satz 3.25 (Sharkovsky) *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und $f : I \to I$ eine stetige Funktion mit periodischem Punkt x der primitiven Ordnung n. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $n \prec m$ gibt es einen periodischen Punkt von f der primitiven Ordnung m.* □

Beweis Sei $\tau := \tau_{(f,x)}$ und G der τ-Graph. Nach Lemma 3.24 hat G einen primitiven Zyklus der Länge m. Dieser Zyklus findet sich vermöge der natürlichen Einbettung auch im f zugeordneten Graphen. Nach Lemma 3.8 folgt damit die Behauptung. ■

Der Satz von Sharkovsky ist so scharf wie möglich formuliert. Das heißt, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, aus der Existenz eines periodischen Punktes einer gewissen Ordnung auch die Existenz eines periodischen Punktes mit kleinerer Sharkovsky-Ordnung zu finden. Dies wird im zum Abschluss dieses Kapitels bewiesen.

Lemma 3.26 *Sei $\tau = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}_n$ eine Bewegung, so dass der τ-Graph keinen Zyklus der Länge $\prec n$ aufweist.*
Dann definiert $\rho := (b_1, b_1 + n, b_2, b_2 + n, \ldots, b_n, b_n + n) \in \mathbb{B}_{2n}$ eine Bewegung, deren Graph keinen primitiven Zyklus der Länge $\prec 2n$ besitzt. □

Beweis Sei G der τ-Graph und H der ρ-Graph.
Es gilt $\rho(x) = x + n \in \{n + 1, \ldots, 2n\}$, falls $1 \leq x \leq n$, und

$\rho(x) = \tau(x-n) \in \{1,\ldots,n\}$, falls $n+1 \leq x \leq 2n$. Damit ist der Graph bis auf die Reflexivkante bei n bipartit. Damit kann es keine ungeraden primitiven Zyklen (außer $\langle n \rangle$) geben.
Außerdem gilt für $1 \leq x \leq n$, dass $\rho^2(x) = \tau(x)$ ist. Damit entspricht jeder Weg in H der Länge 2 von $\{1,\ldots,n\}$ nach $\{1,\ldots,n\}$ einer Kante in G.
Gibt es also einen Zyklus $\langle z_1,\ldots,z_{2k} \rangle$ in H mit $2k \prec n$, so gibt es einen Zyklus $\langle z'_1,\ldots,z'_k \rangle$ in G mit $k \prec n$. Widerspruch! ■

Korollar 3.27 *Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Bewegung $\tau \in \mathbb{B}_n$, so dass deren Graph keine primitiven Zyklen der Länge $k \prec n$ enthält.* □

Beweis Die Bewegung hat die Form $\tau = (1)$ falls $n = 1$. Sei $n = 2^k \cdot m$, mit m ungerade. Dann entsteht τ wie in Lemma 3.21 im Fall $m \geq 3$ oder wie angegeben und nach k-facher Anwendung von Lemma 3.26. ■

Damit ist gezeigt, dass der Satz von Sharkovsky so scharf wie möglich formuliert ist.

Satz 3.28 *Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Funktion, die einen periodischen Punkt primitiver Ordnung n, aber keinen periodischen Punkt mit primitiver Ordnung $\prec n$ hat.* □

Beweis Für τ wie in Korollar 3.27 hat nach Lemma 3.16 $\hat{\tau}$ die geforderte Eigenschaft. ■

4 Reverse Arithmetik

Die Reverse Mathematik dient zur Kalibrierung von Sätzen der gewöhnlichen Mathematik in Systemen verschiedener Stärke. Diese Systeme sind allesamt Teilsysteme des Systems Z_2, das die volle imprädikative Arithmetik zweiter Stufe zulässt und in dem alle Sätze der gewöhnlichen Mathematik bewiesen werden können. Dabei wird der Teilbereich der Mathematik als gewöhnlich bezeichnet, der auf die Anwendung abstrakter mengentheoretischer Prinzipien, wie etwa der Kontinuumshypothese, verzichtet. Dieser Teilbereich umfasst insbesondere die Analysis innerhalb von vollständigen, metrischen und separablen Räumen, die zum Beweis des Satzes von Sharkovky benutzt wird. Im Gegensatz zur Arithmetik erster Stufe zulässt, die nur Quantoren, die über natürliche Zahlen quantifizieren, gibt es auf der zweiten Stufe auch die Möglichkeit, über Teilmengen der natürlichen Zahlen zu quantifizieren.
Die Sprache von Z_2, genannt L_2, besitzt zwei verschiedene Variablentypen. Der erste Typ, der üblicherweise mit kleinen lateinischen Lettern $a, b, n, i, \ldots$ bezeichnet wird, besteht aus Zahlenvariablen, die Werte in der Menge $\omega := \mathbb{N}_0$ annehmen können. Der zweite Typ, der mit großen lateinischen Lettern $X, Y, \ldots$ bezeichnet wird, besteht aus Mengenvariablen, die Teilmengen von ω repräsentieren. Die Variablen des ersten Typs können zusammen mit den Konstanten 0 und 1 mittels der arithmetischen Verknüpfer $+$ und $\cdot$ zu numerischen Termen verbunden werden. Sind t_1 und t_2 solche numerischen Terme und ist X eine Mengenvariable, so sind $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ und $t_1 \in X$ atomare Formeln. Aus diesen Atomen werden wie üblich durch Verwendung der logischen Verknüpfer $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$, sowie der Zahlenquantoren $\forall x, \exists x$ und der Mengenquantoren $\forall X, \exists X$ allgemeine Formeln definiert. Sofern nichts anderes angegeben wird, sind alle im folgenden auftretenden Formeln L_2-Formeln. Mit dieser Sprache erhält man das volle System Z_2 wie folgt:

Definition 4.1 (Z_2: volle Arithmetik zweiter Stufe) Das System Z_2 besteht aus den folgenden Axiomen und Axiomenschemata:

- Arithmetische Axiome über $(0, 1, +, \cdot, <)$:
  - $\forall x\ \neg(x + 1 = 0)$, $\forall x, y\ (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$
  - $\forall x, y\ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$
  - $\forall x(x + 0 = x)$, $\forall x(x \cdot 1 = x)$, $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
  - $\forall x, y\ (x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x)$
  - $\forall x\ \neg(x < 0)$, $\forall x, y\ (x < y \leftrightarrow \exists z(x + z + 1 = y))$
- Komprehension: Sei $\varphi(\bar{a}, \bar{A}, x)$ eine L_2-Formel in der freien Zahlenvariable x, dem freien Zahlenvariablenvektor $\bar{a}$ und dem freien Mengenvariablenvektor $\bar{A}$, in der der Bezeichner Y nicht vorkommt.

$$\forall \bar{A}\ \forall\ \bar{a}\ \exists Y\ \forall x\ (x \in Y \leftrightarrow \varphi(\bar{a}, \bar{A}, x))$$

- Induktion: $\forall Y\ (\ (0 \in Y \wedge \forall x(x \in Y \rightarrow x + 1 \in Y)) \rightarrow \forall x(x \in Y)\ )$ $\square$

Die Existenz von Mengen und damit aller durch Mengen kodierten Objekte, wie zum Beispiel Mengen von Paaren, Folgen oder die weiter unten definierten stetigen Funktionen, wird nur durch das Komprehensionsschema garantiert. Da die Axiome der Arithmetik nicht sinnvoll eingeschränkt werden können und das Induktionsprinzip ohnehin nur für existierende (also komprehendierte) Mengen formuliert ist, erfolgt die Definition der Teilsysteme von Z_2 hauptsächlich durch Einschränkung des Komprehensionsprinzips auf kleinere Formelmengen. Dadurch wird auch das Induktionsprinzip mit eingeschränkt, da natürlich nur über diejenigen Mengen induziert werden kann, die vermöge Komprehension existieren.
Die kleineren Formelmengen bestimmt man durch Beschränkung der zulässigen Anzahl unbeschränkter Quantoren. In dieser Arbeit wird nur die unterste Stufe dieser Hierarchie benötigt, die wie üblich definiert wird:

Definition 4.2 Ein Zahlenquantor der Form $\forall x(x < t \rightarrow \varphi)$ oder $\exists x(x < t \rightarrow \varphi)$ heißt beschränkter Quantor, wobei t ein numerischer Term ist, in dem x nicht vorkommt.
Eine Formel heißt Σ^0_1 [bzw. Π^0_1], falls sie die Form $\exists m\varphi(m)$ [bzw. $\forall m\varphi(m)$] hat, wobei in φ nur beschränkte Quantoren auftreten. □

Wie üblich werden beschränkte Quantoren durch $\forall x < t\varphi$, $\exists x < t\varphi$ abgekürzt. Das schwächste Teilsystem, das nach seinem stark eingeschränkten Komprehensionsprinzip RCA_0 (Recursiv comprehension axiom) benannt wird, kann nun definiert werden:

Definition 4.3 ($\mathbf{RCA_0}$) Das System RCA_0 besteht aus den folgenden Axiomen und Axiomenschemata:

- Arithmetische Axiome über $(0, 1, +, \cdot, <)$ (wie in Definition 4.1)
- Komprehension: $\varphi(x) \in \Sigma^0_1$, $\psi(x) \in \Pi^0_1$
  $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow \varphi(x))$
- Induktion: $\varphi(x) \in \Sigma^0_1$
  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

Um die Lesbarkeit zu verbessern, wurden die führenden Quantoren über die freien Variablen (Parameter) von φ und ψ weggelassen. □

Insbesondere ist in RCA_0, im Gegensatz zu den höheren Systemen ab ACA_0, das Komprehensionsschema schwächer als das Induktionsschema.
Eine Einführung in die Systeme zweiter Stufe kann in [Sim99] gefunden werden. An dieser Stelle werden nur die wichtigsten Definitionen wiederholt.

Definition 4.4 (in RCA_0:)
Ein Code für einen vollständigen, separablen, metrischen Raum $\hat{A}$ ist ein Paar (A, d), wobei A eine abzählbare Menge und d eine Pseudometrik auf A ist, d.h. es gilt

- $\forall a, b \in A: \ d(a, b) \geq 0$,

- $\forall a \in A: \ d(a,a) = 0$,
- $\forall a,b \in A: \ d(a,b) = d(b,a)$ und
- $\forall a,b,c \in A: \ d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

Ein Code für einen Punkt in $\hat{A}$ ist eine Folge $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, mit

$$\forall m,n: \ (m > n \rightarrow d(a_n, a_m) \leq 2^{-n}) \quad .$$

Sind $x = (x_n), y = (y_n)$ Punkte in $\hat{A}$, so wird d durch $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ auf $\hat{A}$ erweitert. Damit definiert man $x = y :\leftrightarrow d(x,y) = 0$.
Die Menge A wird wie üblich durch $a \mapsto (a,a,a,\ldots)$ in $\hat{A}$ eingebettet.
Eine Basis der offenen Mengen in $\hat{A}$ erhält man wie gewöhnlich durch die offenen Kugeln $B(a,r)$, wobei $x \in B(a,r) :\Leftrightarrow (x \in \hat{A} \wedge d(x,a) < r)$ für $a \in A$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ definiert wird. □

Die reellen Zahlen erhält man nun durch Setzen von $(\mathbb{R}, |\ |) := (\hat{\mathbb{Q}}, |\ |)$. Da die Menge aller rationaler Cauchy-Folgen in Z_2 und damit auch in RCA_0 als Menge von Mengen nicht existiert, ist $\mathbb{R}$ aus der Sicht der Arithmetik zweiter Stufe eine echte Klasse. Es können daher keine Behauptungen über $\mathbb{R}$ in L_2 formuliert werden, allerdings sehr wohl über alle (komprehendierbaren) reellen Zahlen, da diese als Mengen von natürlichen Zahlen kodiert sind.
Da die stetigen Funktionen zwischen vollständigen, separablen, metrischen Räumen durch ihr Verhalten auf einer Basis der offenen Mengen, deren Elemente durch die oben definierten Paare in $A \times \mathbb{Q}^+$ kodiert sind, vollständig festgelegt sind, lassen auch sie sich durch Codes ausdrücken:

Definition 4.5 (in RCA_0:)
Seien $(\hat{A}, d_A)$, $(\hat{B}, d_B)$ vollständige, separable, metrische Räume. Ein Code für eine stetige Funktion $f : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ ist eine Menge von Quintupeln

$$F \subseteq \mathbb{N} \times A \times \mathbb{Q}^+ \times B \times \mathbb{Q}^+$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- Falls $(a,r)F(b,s)$ und $(a,r)F(b',s')$, dann $(b,b') \leq s + s'$.
- Falls $(a,r)F(b,s)$ und $(a',r') < (a,r)$, dann $(a',r')F(b,s)$.
- Falls $(a,r)F(b,s)$ und $(b,s) < (b',s')$, dann $(a,r)F(b',s')$).
- Zu jedem $x \in \hat{A}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $(a,r)F(b,s)$ mit $d(x,a) < r$ und $s < \varepsilon$.

Hierbei wurde $(a,r)F(b,s)$ als Abkürzung für $\exists n((n,a,r,b,s) \in F)$ und $(a',r') < (a,r)$ für $d(a,a') + r' < r$ benutzt.
Eine Funktion f heißt stetig, falls ein solcher Code existiert. □

Dieses System ist bereits sehr mächtig (vgl. Theorem I.8.3 in [Sim99]), so können beispielsweise bereits das Bairesche Kategorien-Theorem und Urysohns Lemma in RCA_0 bewiesen werden. Von entscheidender Bedeutung für die Untersuchung des Satzes von Sharkovsky in diesem System ist aber, dass der Zwischenwertsatz, der Fixpunktsatz, sowie sämtliche Sätze der primitiv-rekursiven Arithmetik gelten. Letzteres ermöglicht die Übernahme der Lemmata, die nur Aussagen über die τ-Graphen treffen, da diese als endliche Strukturen primitiv-rekursiv formulierbar sind und daher sogar ohne Anpassung der Beweise aus dem vorhergehenden Kapitel übernommen werden können.

Satz 4.6 (Zwischenwertsatz) (in RCA_0:)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < t < f(b)$ ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = t$. □

Beweis siehe Theorem II.6.6 in [Sim99]. ■

Satz 4.7 (in RCA_0:)
Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Wenn $[a,b] \subseteq f([a,b])$ gilt, so hat f einen Fixpunkt $z \in [a,b]$. □

Beweis siehe Lemma 2.3 in [FSY93]. ■

In [FSY93] wurde bereits gezeigt, dass die Einschränkung des Satzes von Sharkovsky auf gleichmäßig stetige Funktionen und den Fall $n = 3$ innerhalb des Teilsystems RCA_0 beweisbar ist. In dieser Arbeit wird der Beweis auf eine beliebige Wahl der Ausgangsordnung n erweitert. Die Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit bleibt allerdings erhalten.

Definition 4.8 (in RCA_0:)
Seien $f : \hat{A} \to \hat{B}$ stetig. Ein Modulus gleichmäßiger Stetigkeit zu f ist eine Funktion $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \hat{A}$

$$d(x,y) < 2^{-M(n)} \to d(f(x), f(y)) < 2^{-n}$$

gilt. Eine Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn sie stetig ist und ein solcher Modulus zu f existiert. □

Im allgemeinen kann innerhalb von RCA_0 nicht garantiert werden, dass die iterierten Funktionen einer stetigen Funktion ebenfalls stetig sind. Allerdings vererbt sich zumindest die gleichmäßige Stetigkeit immer auf ihre iterierten Funktionen.

Lemma 4.9 (in RCA_0:)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existieren gleichmäßig stetige Funktionen $f^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$ und $f^0(x) = x$ wie gehabt. □

Beweis siehe Lemma 2.7 in [FSY93]. ■

Eine Variante des Lemmas 3.4, läßt sich in RCA_0 beweisen. Der Hauptunterschied besteht darin, dass im folgenden Lemma zwei Intervalle konstruiert werden, die das in Lemma 3.4 gesuchte Intervall einschließen.

Lemma 4.10 (in RCA_0:)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und seien $u, v, s, t \in \mathbb{R}$ mit $u < s < t < v$. Falls $[u,v] \subseteq f([a,b])$ gilt, dann gibt es rationale Zahlen u', s', t', v' mit $a < u' < s' < t' < v' < b$, $\min\{f(s'), f(t')\} < s < t < \max\{f(s'), f(t')\}$ und $f([s',t']) \subseteq f([u',v']) \subset (u+\varepsilon, v-\varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. □

Beweis siehe Lemma 3.2 in [FSY93]. ■

Lemma 4.11 (in RCA_0:)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit periodischem Punkt x der primitiven Ordnung n. Dann existiert der $\tau_{(f,x)}$-Graph und es gibt zu jedem Zyklus $\langle i_1, \ldots, i_m\rangle$ im $\tau_{(f,x)}$-Graphen einen primitiven Zyklus $\langle I_1, \ldots, I_m\rangle$ von Intervallen mit $f(I_k) \subseteq I_{k+1}$ und $f(I_m) \subseteq I_1$. □

Beweis Der erste Teil ist trivial.
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ der sortierte Orbit von x.
Wähle $I_k := [x_{i_k}, x_{i_k+1}]$. Die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz. ■

Damit lässt sich der Satz von Sharkovsky für gleichmäßig stetige Funktionen und *alle Ausgangsordnungen* beweisen.

Satz 4.12 (Sharkovsky für gleichmäßig stetige Funktionen) (in RCA_0:)
*Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion mit periodischem Punkt x der primitiven Ordnung n und sei $n \prec m$.
Dann hat f einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung m.* □

Beweis o.B.d.A. sei $f^*(x) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_i < x_{i+1}$ der sortierte Orbit von x.
Nach Lemma 3.24 gibt es einen primitiven Zyklus der Länge m im $\tau_{(f,x)}$-Graphen.
Sei der $\langle I_1, \ldots, I_m\rangle$ der Zyklus nach Lemma 4.11.
Aus diesem Zyklus kann nun genau wie im Beweis von Theorem 3.3 in [FSY93] eine Folge $(A_k \mid 1 < k \leq m)$ von Intervallen gewonnen werden mit $I_1 \subseteq f^k(A_k) \subseteq [\min I_1 - \varepsilon, \max I_1 + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ und $1 < k \leq m$.
Genau wie in [FSY93] folgt die Behauptung damit aus dem Zwischenwertsatz. ■

Ein etwas stärkeres Teilsystem von Z_2 ist das System WKL_0. Dieses besteht aus allen Axiomen von RCA_0 und dem schwachen Königslemma, das als weiteres Axiom hinzugefügt wird.

Definition 4.13 Sei $T \subset \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ ein binärer Baum, d.h. mit $t \in T$ sind auch alle Initialsegmente von t in T.
Eine Folge $P : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ heißt Pfad in T, falls gilt:

$$\text{für } \; n \in \mathbb{N} \; \text{ ist } \; (P(1), \ldots, P(n)) \in T.$$

Das schwache Königslemma sagt aus: Jeder binäre Baum mit unendlich vielen Elementen hat einen Pfad. □

In diesem System kann bewiesen werden (vgl. Theorem IV.2.3 in [Sim99]), dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bereits gleichmäßig stetig ist. Damit ist klar, dass in WKL_0 der Satz von Sharkovsky ohne weitere Einschränkung gilt. Es verbleibt daher noch die Frage bezüglich der Einordnung des Satzes, also die Frage, ob sich im System RCA_0 + S.v. Sharkovsky bereits das schwache Königslemma beweisen läßt. Üblicherweise zeigt man dafür die folgende äquivalente Fassung:

> Beweist das System RCA_0 + „Es gibt einen unendlichen binären Baum ohne Pfad“ die Existenz eines Paares (n, m) mit $n \prec m$ und einer stetigen Funktion, die zwar einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung n, aber keinen der Ordnung m besitzt?

Diese Frage ist leider noch offen. Die Versuche mittels der üblichen Verfahren, die z.B. benutzt werden, um eine stetige, unbeschränkte Funktion auf $[0, 1]$ zu definieren, führten bisher nicht zum Erfolg. Eine genaue Einordnung des Satzes ist daher noch nicht möglich.

5 Konstruktive Analysis

In der klassischen Logik gilt das Prinzip *Tertium Non Datur* (TND), das alle Aussagen der Form $\varphi \vee \neg\varphi$ als wahr annimmt. Es gibt jedoch keinen effektiven Weg, zu einer gegebenen Formel zu entscheiden, ob nun sie oder ihre Negation gilt. Zudem folgen aus dem TND in der klassischen Mathematik weitere Prinzipien, beispielsweise Existenzsätze für Elemente oder Mengen mit bestimmten Eigenschaften, ohne eine Möglichkeit anzugeben, wie solche konstruiert werden können.

Beispiel 5.1 (Deppenformel) Sei das Universum die Menge der Personen und D die Menge der Deppen. Die Formel

$$\exists a(a \in D \rightarrow \forall x(x \in D))$$

ist klassisch ohne genauere Inspektion des Universums beweisbar: Sind alle Personen Deppen, so ist die Formel $\forall x(x \in D)$ wahr und damit die Implikation $a \in D \rightarrow \forall x(x \in D)$. Durch Existenzeinführung folgt die Formel. Ansonsten gibt es ein Individuum $k \notin D$. Für die Substitution $[a/k]$ ist die Formel $a \in D \rightarrow \forall x(x \in D)$ damit gültig.
Möchte man nun aus dem durch das TND garantierten klassischen Beweis ein Exemplar α extrahieren, dann könnte dieses nur durch eine freie Variable a benannt werden. Man hätte damit die Formel $a \in D \rightarrow \forall x(x \in D)$ bewiesen. Nach einer Existenz-Einführung im Antecedens folgt aus dieser Formel aber

$$(\exists a\ (a \in D)) \rightarrow \forall x(x \in D)\ ,$$

also die Aussage, dass bereits jeder ein Depp ist, wenn es überhaupt einen Deppen gibt. □

Eine etwas ernsthaftere Betrachtung der Konsequenzen des TND ermöglichen sogenannte Allwissenheitsprinzipen. Diese sind allgemeine Behauptungen über bestimmte Typen von $\{0,1\}$-Folgen, die eine existenzielle oder disjunktive Entscheidung erfordern. Allerdings ist es nach Formulierung der Prinzipien sehr unwahrscheinlich, dass ein Algorithmus gefunden werden kann, der solche Behauptungen entscheidet.
Wie es bei anderen Systemen auch üblich ist, gibt es eine Hierarchie der Beweisstärke dieser Allwissenheitsprinzipien. Die wichtigsten sind hierbei die Prinzipen LPO und LLPO, die wie folgt definiert sind.

Definition 5.2 Das eingeschränkte Prinzip der Allwissenheit (LPO / limited principle of omniscience) sagt aus:
Sei $(a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eine binäre Folge.
Dann gilt entweder $\exists n \in \mathbb{N} :\ a_n = 1$ oder $\forall n \in \mathbb{N} :\ a_n = 0$. □

Aus diesem Prinzip folgt die schwächere Version:

Definition 5.3 Das schwache eingeschränkte Prinzip der Allwissenheit (LLPO / lesser limited principle of omniscience) sagt aus:
Sei $(a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ eine binäre Folge, die höchstens an einer Position eine 1 stehen hat. Dann gilt entweder $\forall n \in \mathbb{N}\ (a_{2n} = 0)$ oder $\forall n \in \mathbb{N}\ (a_{2n+1} = 0)$. □

Ein Algorithmus, der LLPO entscheidet, müsste die Folge schrittweise abtasten und prüfen, ob ein eingelesenes Glied gleich 1 ist. Falls ein solches gefunden wird, bestimmt dessen Position (gerade/ungerade) die Entscheidung des Algorithmus. Allerdings müsste der Algorithmus ebenso eine Routine besitzen, die mitteilt, wie lange er maximal suchen muss, da er ansonsten nicht terminiert, falls alle Glieder gleich 0 sind. Die Existenz einer solchen Routine, die auch noch unabhängig von der untersuchten Folge sein müsste, ist sehr unwahrscheinlich.
Deswegen wird das LLPO normalerweise in der konstruktiven Analysis nicht zugelassen, genauso wie alle anderen konstruktiv nicht gültigen Allwissenheitsprinzipien. Man benutzt statt der klassischen Logik die intuitionistische, die die geforderten Existenz- und Entscheidbarkeitseigenschaften zumindest für die zugrunde liegende Mengenlehre erzwingt und die Allwissenheitsprinzipien nicht beweist. In der darauf aufgebauten Analysis kann man dann die klassisch gültigen Sätze entweder konstruktiv beweisen, oder aber auch sehr häufig falsifizieren, indem man zeigt, dass deren Gültigkeit ein Allwissenheitsprinzip impliziert. In manchen Fällen kann man die klassischen Sätze auch in eine Nichtkonstruktivitätsstufe einordnen, indem man zeigt, dass ein ausgewähltes Allwissenheitsprinzip über dem konstruktiven System äquivalent zum untersuchten Satz ist. Dieses Phänomen könnte man als *konstruktive reverse Mathematik* bezeichnen. In diesem Fall nehmen also die Allwissenheitsprinzipien die Stellung ein, die in der reversen Mathematik die Existenzprinzipien besitzen.
Das LLPO liegt zum Beispiel auf einer Ebene mit dem Zwischenwertsatz und dem Satz von Sharkovsky, wie im Folgenden gezeigt wird. Dass dieser Satz tatsächlich über einem System der konstruktiven Mathematik, genannt Bish, mit dem LLPO äquivalent ist, wurde bereits von Hannes Diener und Arno Berger (University of Canterbury, Department of Mathematics and Statistics) vermutet, wie sie dem Betreuer der Arbeit in einer e-Mail mitteilten. Eine Veröffentlichung dieses Satzes liegt derzeit allerdings nicht vor.
Eine gut lesbare Einführung in das System Bish kann in [BV00] gefunden werden, aus dem auch die meisten Definitionen übernommen sind. Um den Beweis der Äquivalenz zwischen dem Satz von Sharkovsky und dem LLPO durchführen zu können, müssen die folgenden Züge von Bish skizziert werden.

Die in Bish benutzten Mengen basieren auf Grundmengen, wie den natürlichen Zahlen, die eine Gleichheits- und eine Ungleichheitsrelation mit sich führen. Es können die üblichen Konstruktionen, wie kartesisches Produkt und Bilden des Folgenraumes, benutzt werden. Dabei werden die Gleichheit und die Ungleichheit zunächst komponentenweise auf die neue Struktur erweitert. Generell werden Relationen auf neu konstruierten Mengen meist auf die bereits bestehenden Relationen der Basismenge zurückgeführt. Die Verwendung separater Gleichheit und Ungleichheit ist insbesondere wichtig, da zwei Elemente einer Menge zwar gleich sein können, aber nicht alle Eigenschaften gemeinsam haben müssen.

Beispiel 5.4 Die Gleichheit auf beliebigen Mengen A, B kann wie folgt definiert werden:

$$A = B :\Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Die Ungleichheit wird folgendermaßen eingeführt:

$$A \neq B :\Leftrightarrow \exists x\ ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (\neg x \in A \wedge x \in B))$$

Die Richtung $A \neq B \rightarrow \neg(A = B)$ ist intuitionistisch beweisbar, die andere Richtung $A \neq B \leftarrow \neg(A = B)$ allerdings nicht. Die beiden Definitionen gehen also nicht durch Dualisierung auseinander hervor. □

Definition 5.5 Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist eine Folge $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \ |x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1} \quad .$$

Solche Folgen werden auch *reguläre* Cauchy-Folgen genannt.
Zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sind gleich, in Zeichen $x = y$, genau dann, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |x_n - y_n| \leq \frac{2}{n} \quad .$$

Eine reelle Zahl x heißt rational, falls ein $q \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x = (q, q, q, \ldots)$. □

Der klassiche Satz, dass jede Cauchy-Folge eine reguläre Teilfolge besitzt, ist konstruktiv nicht beweisbar. Die Definition der üblichen arithmetischen Operationen auf reellen Zahlen ist daher etwas aufwendiger als im klassischen Fall. Um dies durchführen zu können, insbesondere auch um die Ungleichheit zweier reeller Zahlen definieren zu können, benötigt man noch eine grobe Abschätzung für deren Folgenglieder.

Definition 5.6 Zu $x \in \mathbb{R}$ heißt $K_x := \lfloor |x_1| \rfloor + 3$ die kanonische Schranke von x. □

Die arithmetischen Operationen können dadurch beinahe wie im klassischen Fall von den rationalen Zahlen auf die reellen übertragen werden.

Definition 5.7 Seien $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathbb{R}$.

- $x \pm y := (x_{2n} \pm y_{2n})$
- $x \cdot y := (x_{2kn} \cdot y_{2kn})$, wobei $k := \max\{K_x, K_y\}$
- $\max\{x, y\} := (\max\{x_n, y_n\})$ und $\min\{x, y\} := (\min\{x_n, y_n\})$
- $|x| := (|x_n|)$ □

Die in der intuitionistischen Mengenlehre zusätzlich erforderliche Ungleichheitsrelation und die Ordnung auf den reellen Zahlen sind etwas aufwendiger zu definieren:

Definition 5.8 Seien $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathbb{R}$.

- $x \in \mathbb{R}$ ist positiv, falls $\exists n : \ x_n > n^{-1}$ konstruktiv gilt.
- Es gilt $x < y$ genau dann, wenn $y - x$ positiv ist.

- Es gilt $x \neq y$ genau dann, wenn $|x-y| > 0$.

Man beachte, dass die Negation der Gleichheit zweier reeller Zahlen konstruktiv noch nicht deren Ungleichheit zur Folge hat.

Definition 5.9 Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$. Nach Definition gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| > m^{-1}$ für alle $n \geq m$.
Daher kann man eine neue Folge (y_n) wie folgt definieren: $y_n := x_{m^3}^{-1}$, falls $n \leq m$, und $x_{nm^2}^{-1}$ sonst.
Diese reelle Zahl bezeichnet man als x^{-1}. Sie hat die Eigenschaft $x^{-1} \cdot x = 1$. □

Definition 5.10 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

- M heißt bewohnt, falls $\exists x : x \in M$ konstruktiv gilt.
- M heißt total beschränkt, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche ε-Approximation von M existiert.
  D.h. es gibt eine (endliche) bewohnte Menge $T \subseteq M$, mit
  $$\forall m \in M \exists t \in T : \ (|t-m| < \epsilon) \ .$$ □
- M heißt kompakt, wenn sie total beschränkt und vollständig (jede Cauchy-Folge konvergiert) ist.

Es ist klar, dass jedes echte Intervall $[a,b]$ bewohnt, total beschränkt und kompakt ist, da $a \in [a,b]$ gilt und für jedes $\varepsilon > 0$ $\{a, a+\delta, a+2\delta, \ldots, b\}$ eine ε-Aproximation von $[a,b]$ ist, wobei $\delta := (b-a)/\lceil (K_{b-a}/\varepsilon) \rceil$ definiert wird. Die Vollständigkeit „erbt" das Intervall von $\mathbb{R}$. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen wird in Theorem 2.1.21 in [BV00] bewiesen.
Einige nützliche Fakten über Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind:

Lemma 5.11 *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ total beschränkt. Dann existieren* $\sup S$ *und* $\inf S$. □

Beweis siehe Proposition 2.2.5 in [BV00] ■

Definition 5.12 Eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ heißt Abbildung, falls
$$\forall a \in A \exists! b \in B : \ (a,b) \in f$$
gilt. Zu jedem $a \in A$ wird das so konstruierte Element $f(a)$ genannt. Eine Abbildung heißt Funktion, wenn sie extensional ist, das heißt, es gilt
$$\forall a, a' \in A : \ (a =_A a' \to f(a) =_B f(a')) \ .$$
Man schreibt in diesem Fall $f : A \to B$. □

Die üblichen Eigenschaften von Funktionen lassen sich auch in der konstruktiven Analysis definieren. Einige wichtige sind die Stetigkeitsbegriffe.

Definition 5.13 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- stetig in $x \in A$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt,
- stetig, falls f stetig in jedem Punkt von A ist und
- gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

(Insbesondere hängt das ε bei der gleichmäßigen Stetigkeit nicht von einem festen $x \in A$ ab) □

Lemma 5.14 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ ein total beschränkte Menge und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist $f(X)$ beschränkt. Zudem existieren*

- *das Supremum $\sup_{x \in X} f(x) = \sup\{y \mid y \in f(X)\}$ und*
- *das Infimum $\inf_{x \in X} f(x) = \inf\{y \mid y \in f(X)\}$.*

Ist X kompakt, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$ und ein $x \in X$ mit $\inf_{x \in X} f(x)$ □

Beweis Der erste Teil folgt aus Korollar 2.2.7 in [BV00], der zweite Teil aus den Konstruktionen der Beweise von Proposition 2.2.5 und 2.2.6 in [BV00] zusammen mit der Kompaktheit. ■

Lemma 5.15 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist für fast alle $r \in \mathbb{R}$ (bis auf abzählbar viele) die Menge*

$$\{x \in A \mid f(x) \leq r\}$$

entweder kompakt oder unbewohnt. □

Beweis siehe Korollar 2.2.14 in [BV00]. ■

Bemerkung 5.16 Im sich über mehrere Propositionen erstreckenden Beweis des vorhergehenden Lemmas wird die Folge der nicht verfügbaren Grenzen wie folgt gewonnen:
Man wählt eine endliche total beschränkte Überdeckung $K_{i,n}$ von A für immer größere Werte von $k \in \mathbb{N}$, mit $\forall x, y \in K_{i,n} : \ |x - y| \leq n^{-1}$.
Anschließend bildet man die Infima auf allen Mengen $f(K_{i,n})$.
Da im Allgemeinen nicht geschlossen werden kann, dass es einen Wert $x \in K_{i,n}$ mit $f(x) = \inf f(K_{i,n})$ gibt, müssen die Werte $\inf f(K_{i,n})$ als Grenzen (Instanzen von r) ausgeschlossen werden.
Wählt man aber als kompakte Menge ein (abgeschlossenes) Intervall, so kann man die oben genannte Folge von total beschränkten Überdeckungen durch kompakte Überdeckungen ersetzen. Damit wird das beschriebene Problem der nichtexistierenden Infima umgangen (nach Lemma 5.14) und es muss daher keine reelle Zahl als Grenze ausgeschlossen werden. □

Damit folgt die modifizierte Version:

Korollar 5.17 *Ist I ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so sind die Mengen*

$$\{x \in A|\ f(x) \leq r\} \quad \textit{und} \quad \{x \in A|\ f(x) \geq r\}$$

entweder kompakt oder unbewohnt. □

Beweis Die erste Menge folgt aus Bemerkung 5.16 und die zweite nach Übergang zu $-f(x)$. ■

Im Gegensatz zur klassischen Analysis folgt in der konstruktiven Mathematik aus der Stetigkeit einer Funktion, die nur auf einem Intervall definiert ist, noch nicht die gleichmäßige Stetigkeit auf eben diesem Intervall (siehe z.B. [BV00]). Da diese im klassischen Beweis implizit an einigen Stellen benutzt wurde (z.B. in Lemma 3.4, um die Maxima zu bestimmen), muss der Satz von Sharkovsky in seinen Hypothesen etwas verschärft werden. Die konstruktive Variante lautet daher:

Definition 5.18 Der Satz von Sharkovsky besagt:
Sei $\prec$ die Sharkovsky-Ordnung, wie bereits definiert, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Gibt es einen periodischen Punkt $x \in I$ der primitiven Ordnung $n \in \mathbb{N}$, so dass $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x) \in I$ gilt, dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ mit $n \prec m$ einen periodischen Punkt $y \in I$ der primitiven Ordnung m mit $y, f(y), \ldots, f^{m-1}(y) \in I$. □

Diese Formulierung ist innerhalb der klassischen Mathematik äquivalent zu der in Kapitel 3 gezeigten Version. Wie aus der Äquivalenz des Satzes mit LLPO folgt, gilt dies allerdings nicht innerhalb von Bish. Das gleiche Problem ergibt sich im Falle des Zwischenwertsatzes, der daher ebenfalls umformuliert werden muss.

Definition 5.19 Der Zwischenwertsatz besagt:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < t < f(b)$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = t$. □

Lemma 5.20 *Der Zwischenwertsatz ist äquivalent mit LLPO.* □

Beweis siehe Kapitel 3, Theorem (2.4) in [BR87] ■

Man kann die angegebene konstruktive Version des Zwischenwertsatzes auch noch weiter einschränken, ohne dass dieser an Beweisstärke verliert. Es genügt nämlich die folgende, nur scheinbar schwächere Fassung des Zwischenwertsatzes:

Lemma 5.21 *Der Zwischenwertsatz ist äquivalent mit der folgenden Version:*
(★) *Sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig mit $g(0) > 0$ und $g(1) < 0$. Dann hat g eine Nullstelle in $[0, 1]$.* □

Beweis Die erste Richtung ist klar.
Für die Rückrichtung: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig mit $f(a) < t < f(b)$ für ein $t \in \mathbb{R}$.
Definiere $g(x) := t - f(a + x(b - a))$. Offenbar gilt $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = t - f(a) > 0$ und $g(1) = t - f(b) < 0$. Daher gibt es nach Voraussetzung ein $d \in [0, 1]$ mit $g(d) = 0$. Damit gilt aber $t - f(a + d(b - a)) = 0$ und weiter $f(c) = t$, mit $c := a + d(b - a) \in [a, b]$. ■

Lemma 5.22 *Der Satz von Sharkovsky impliziert LLPO:* □

Beweis
Nach Lemmata 5.21 und 5.20 reicht es zu zeigen: Sharkovsky impliziert (★).
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, mit $f(0) > 0$ und $f(1) < 0$.
Betrachte die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} -2x + f(0)(x+1) & \\ f(x) + x & \text{falls} \\ -(f(1)+1)(x-2) - (x-1) & \end{cases} \begin{matrix} x \in [-1, 0] \\ x \in [0, 1] \\ x \in [1, 2] \end{matrix}$$

g ist gleichmäßig stetig und wohldefiniert. Zudem besitzt g den periodischen Punkt -1 der Ordnung 2. Nach dem Satz von Sharkovsky gibt es also einen Fixpunkt $c \in [-1, 2]$ von g.
Nach Wahl von g gilt $\forall x \in [1, 2] : g(x) < 1$ und $\forall x \in [-1, 0] : g(x) > 0$. Es folgt $c \notin [-1, 0] \cup [1, 2]$ und damit $c \in [0, 1]$.
Nach Definition hat man daher $f(c) + c = c$ und damit $f(c) = 0$. ■

Im vorhergehenden Beweis sticht die Tatsache heraus, dass von der ganzen Sharkovsky-Ordnung nur das letzte Paar $2 \prec 1$ benutzt wurde. Aufgrund dessen wirkt der Satz von Sharkovsky wesentlich stärker als LLPO. Ein Beweis der Rückrichtung scheint daher unwahrscheinlich. Trotzdem reicht bereits das System Bish + LLPO aus, um den Satz zu beweisen. Zur Durchführung genügt es, den im Kapitel 3 gegebenen klassischen Beweis für die Zwecke der konstruktiven Mathematik anzupassen.

Lemma 5.23 *LLPO impliziert:*
Sei $a < c < b$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$: $x \leq c \vee c \leq x$ □

Beweis Betrachte die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} (a-1) + (x-a)(1 + \frac{2}{c-a}) & \\ c & \text{falls} \\ c + (x - c - \frac{b-c}{2})(1 + \frac{2}{d-c}) & \end{cases} \begin{matrix} x \in [a, a + \frac{c-a}{2}] \\ x \in [a + \frac{c-a}{2}, c + \frac{b-c}{2}] \\ x \in [c + \frac{b-c}{2}, b] \end{matrix}$$

Nun gilt $g(a) = a - 1 < a$ und $g(b) = b + 1 > b$. Damit gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein z mit $g(z) = x$. Falls $z < c + \frac{b-c}{2}$ ist $x \leq c$ und falls $z > a + \frac{c-a}{2}$ ist $c \leq x$. ■

Dieser Beweis läßt sich leicht verallgemeinern.

Korollar 5.24 *LLPO impliziert:*
Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $x \leq a \vee a \leq x$ □

Das konstruktive Analogon zu Satz 3.3 lautet:

Satz 5.25 (Fixpunktsatz) *LLPO impliziert:*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Wenn $I \subseteq f(I)$ gilt, so hat f einen Fixpunkt $z \in I$. □

Beweis Nach Lemma 5.14 gibt es $c, d \in I$ mit $f(c) = \inf f(I)$ und $f(d) = \sup f(I)$.
Angenommen $c < d$: Wegen $I \subseteq f(I)$ gilt $f(c) \leq a$ und $b \leq f(d)$.
Weiter gilt nach Definition $d \leq f(d)$ und $f(c) \leq c$. Betrachte die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} (f(c)-c)(x-c+1) - (f(c)-c-1)(x-c) & x \in [c-1, c] \\ f(x) - x & \text{falls } x \in [c, d] \\ -(f(d)-d)(x-d-1) + (f(d)-d+1)(x-d) & x \in [d, d+1] \end{cases}$$

Es gilt $g(d+1) > 0$ und $g(c-1) < 0$. Also gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle z.
Weil $g(x) > 0$ für $x \in [d, d+1]$ ist, da die Funktion dort die Gerade zwischen $f(d)-d$ (≥ 0, wie oben gezeigt) und $f(d)-d+1$ eine Gerade ist
und $g(x) < 0$ für $x \in [c-1, c]$, da die Funktion auch dort eine Gerade ist, diesmal zwischen $f(c)-c-1$ und $f(c)-c$ (≤ 0, wie oben gezeigt) eine Gerade ist, folgt $z \in [c, d]$.
Also gilt $f(z) - z = 0$ und damit die Behauptung.
Der Fall $d < c$ folgt analog. ■

Auch der Satz über die Wahl von Teilintervallen (Lemma 3.4) kann in Bish + LLPO bewiesen werden.

Lemma 5.26 *LLPO impliziert:*
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
Wenn $J \subseteq f(I)$ gilt, so gibt es ein abgeschlossenes Teilintervall $K \subseteq I$ mit $J = f(K)$. □

Beweis Sei $J := [a, b]$.
Nach Lemma 5.14 gibt es $c, d \in I$ mit $f(c) = \inf f(I)$ und $f(d) = \sup f(I)$.
Nach Bemerkung 5.17 ist die Menge $A := \{x \in I \mid f(x) \leq a\}$ entweder total beschränkt oder unbewohnt.
Beh: Die Menge A ist bewohnt:
Bew:

Definiere die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} f(c)(x-c+1) - (f(c)-1)(x-c) & x \in [c-1, c] \\ f(x) & \text{falls } x \in [c, d] \\ -f(d)(x-d-1) + (f(d)+1)(x-d) & x \in [d, d+1] \end{cases}$$

Es gilt $g(c-1) < a$ und $g(d+1) > a$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher einen Punkt z mit $f(z) = a$. Offenbar gilt $z \in A$.

Beh: Entweder die Menge $A^- := \{x \in A | x < d\}$ oder
die Menge $A^+ := \{x \in A | x > d\}$ ist bewohnt.
Bew:

> Für das oben konstruierte Element $z \in A$ gilt nach Lemma 5.23 entweder $z < d$ oder $z > d$ (d ist kein Element von A).

Offensichtlich sind mit A auch A^+ und A^- kompakt (oder unbewohnt) und die beiden Mengen werden durch d separiert, d.h.

$$\forall x \in A^-, y \in A^+ : \; x < d < y.$$

Angenommen A^- ist bewohnt:
Sei $l := \sup A^- \in A^-$ nach Lemma 5.14.
Beh: Es gilt $f(l) = a$:
Bew:

> Ansonsten gilt $f(l) < a$ nach Definition. Dann hätte nach dem Mittelwertsatz f eine a-Stelle zwischen l und d. Diese wäre aber in A^- und größer als l. Dies ist ein Widerspruch, da l das Supremum von A^- ist.

Nach analoger Beweisführung folgt, dass die Menge

$$B := \{x \in I | \; f(x) \geq b \wedge x > l\}$$

kompakt ist und daher ein Infimum $r := \inf B$ besitzt, für das $f(r) = b$ gilt. Außerdem nimmt f zwischen l und r kein weiteres Mal Werte außerhalb $[a, b]$ an. Damit folgt für $K := [l, r]$ die Behauptung.
Der Fall, dass A^+ bewohnt ist, folgt analog. ■

Korollar 5.27 *LLPO impliziert:*
Seien $I_0, I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle und $f : \bigcup_{i=1}^{n} I_i \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige reelle Funktion mit $1 < k \leq n \to I_k \subseteq f(I_{k-1})$. Dann gibt es ein kompaktes Teilintervall $K \subseteq I_0$ mit $f^k(K) = I_k$, falls $0 \leq k \leq n$. Gilt zudem $I_0 = I_n$, so hat f einen periodischen Punkt der Ordnung n. □

Beweis Analog zum Beweis von Lemma 3.5 aus Lemma 5.26 und Lemma 5.25. ■

Unter Benutzung der Graphen-Definitionen des klassischen Beweises gilt auch in diesem Fall die Existenz des $\tau_{(f,x)}$-Graphen.

Lemma 5.28 *LLPO impliziert:*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und sei x ein periodischer Punkt der primitiven Ordnung n mit $f^i(x) \in I$ für $0 \leq i \leq n$. Dann existiert der $\tau_{(f,x)}$-Graph. □

Beweis Wegen $f^i(x) \neq f^j(x)$, falls $0 \leq i < j < n$, und Lemma 5.23 ist der Orbit anordenbar. Daher folgt die Behauptung . ■

Da die τ-Graphen endliche Strukturen sind, gelten die klassisch bewiesenen Lemmata und Sätze über diese analog. Man kann die Beweise der Lemmata 3.18 bis 3.24 wörtlich übernehmen, da dort nur Eigenschaften natürlicher Zahlen, die auch konstruktiv gelten, benutzt werden. Allerdings ist Lemma 3.24 zunächst nur ein Existenzbeweis, der auf die Konstruktion eines Zyklus verzichtet. Man kann jedoch primitive Zyklen im Graphen durch gewöhnliche Graphenalgorithmen gewinnen. Z.B. kann Tiefensuche eingesetzt werden, mit der zunächst die kürzesten Zyklen katalogisiert werden. Anschließend kann aus überschneidenden Zyklen ein primitiver Zyklus der gewünschten Länge erzeugt werden. Die Termination dieses Algorithmus folgt aus der bewiesenen Existenz des Zyklus.
Um den Beweis wie im klassischen Fall fortzuführen, kann leider nicht sofort auf die (f,x) zugehörigen Graphen zurückgegriffen werden, da für deren Konstruktion nötig wäre, die Gleichheit zwischen zwei reellen Zahlen zu entscheiden. Allerdings kann dieser Graph aus der Beweisführung eliminiert werden.

Lemma 5.29 *LLPO impliziert: Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $x \in I$ ein periodischer Punkt primitiver Ordnung n mit $f^*(x) \subseteq I$ und $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, mit $i < j \to x_i < x_j$, der geordnete f-Orbit von x.*
Beinhaltet der $\tau_{(f,x)}$-Graph $G = (V, E)$ eine Kante (i, j), so gilt

$$[x_j, x_{j+1}] \subseteq f([x_i, x_{i+1}]) \ . \qquad \square$$

Beweis Sei $\tau := \tau_{(f,x)}$. Nach Definition gilt

$$(i,j) \in E \ :\Leftrightarrow \ \tau(i) \leq j < \tau(i+1) \vee \tau(i+1) \leq j < \tau(i)$$

Angenommen es gilt $\tau(i) \leq j < \tau(i+1)$:
Es gilt $\tau(i) \leq j$ und $j+1 \leq \tau(i+1)$. Damit gilt $f(x_i) \leq x_j$ und $x_{j+1} \leq f(x_{i+1})$.
Für jedes t mit $x_j < t < x_{j+1}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz daher ein $z \in [x_i, x_{i+1}]$ mit $f(z) = t$. Damit folgt die Behauptung.
Der andere Fall folgt analog. ∎

Lemma 5.30 *LLPO impliziert den Satz von Sharkovsky.* □

Beweis Seien f, x, n, m wie gefordert.
Nach Lemma 3.24 beinhaltet der $\tau_{(f,x)}$-Graph einen primitiven Zyklus der Länge m (siehe oben). Nach Lemma 5.29 kann diesem eine Intervallfolge $I_1, \ldots, I_m, I_{m+1} = I_1$ zugeordnet werden, für die gilt: $f(I_i) \subseteq f(I_{i+1}$.
Mit Lemma 5.27 gibt es einen periodischen Punkt der primitiven Ordnung m. ∎

Insgesamt wurde bewiesen:

Satz 5.31 *Über dem System* Bish *gilt:*
LLPO $\Leftrightarrow$ Satz von Sharkovsky (für gleichmäßig stetige Funktionen.) □

6 Berechenbarkeit und Komplexität

Jeder, der sich mit theoretischer Informatik befasst hat, kennt die Schwierigkeiten, die sich bereits bei Berechenbarkeitsfragen bezüglich natürlicher und rationaler Zahlen ergeben. Eine Erweiterung der üblichen formalen Berechenbarkeits-Mittel auf irrationale Zahlen scheint zunächst absurd, da nicht nur die Kardinalität von $\mathbb{R}$ wesentlich größer ist, als die Kardinalität der Menge der üblichen Turingmaschinen, sondern reelle Zahlen auch unendliche Objekte darstellen, die im Allgemeinen nicht endlich kodiert werden können. Trotzdem kann man eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ als berechenbar kategorisieren. Es stellen sich sogar alle wichtigen reellen Zahlen, die man in der Praxis antreffen kann, wie z.B. $e, \pi, \sqrt{2}, \ldots$, als berechenbar heraus.
Um die Eigenschaft einer reellen Zahl, berechenbar zu sein, konkretisieren zu können, benötigt man noch einige Vorarbeit.
Der wichtigste verwendete Maschinentyp ist die n-Band Turingmaschine. Sie besitzt ein einseitig unendlich langes Eingabeband (isomorph zu $\mathbb{N}$), n in beide Richtungen unendlich lange Rechenbänder (jeweils isomorph zu $\mathbb{Z}$) und ein wieder nur einseitig unendlich langes Ausgabeband (isomorph zu $\mathbb{N}$). Die Größe n zählt also nur die Arbeitsbänder. Wie üblich kann auf dem Eingabe- und dem Ausgabeband nur das sogenannte Eingabealphabet benutzt werden, während auf den Rechenbändern ein um zusätzliche Symbole erweitertes Arbeitsalphabet verwendet werden kann.
Formal kann man dies so erfassen:

Definition 6.1
Eine (n-Band) Turingmaschine T ist gegeben durch ein 7-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$$

Hierbei sind

- Z eine Menge von Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ das Arbeitsalphabet,
- $\delta : (Z \times B) \to \mathcal{P}(Z \times B \times \{L, R, N\}^{n+2})$ die Überführungsfunktion, wobei $B := (\Gamma^n \times \Sigma^2)$ den Bandstatus und $\{L, R, N\}^{n+2}$ den Wechsel der Zustände bezeichnet,
- $z_0 \in Z$ der Startzustand,
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ das Blank und
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände.

Ist $\delta(z, b)$ einelementig für alle $(z, b) \in Z \times B$, so nennt man die Turingmaschine deterministisch, ansonsten nichtdeterministisch.
Ein Lauf einer Turingmaschine wird durch $h = T(k)$ dargestellt. Hierbei ist k der

Wert auf dem Eingabeband und h der Wert des Ausgabebandes, falls die Turingmaschine mit der Eingabe k terminiert. Terminiert diese nicht, so ist die Schreibweise unzulässig. Insbesondere gilt $h, k \in \Sigma^*$. $\square$

Der Einfachkeit halber wird die Anzahl der benutzten Rechenbänder nicht immer mit angegeben. Des weiteren wird eine Turingmaschine, die mit jeder natürlichen Zahl als Eingabe terminiert, wie folgt mit der von ihr berechneten Folge identifiziert:

Definition 6.2 Sei T eine Turingmaschine. Falls T für alle $k \in \mathbb{N}$ mit der Eingabe k terminiert, so wird die Folge $(T(k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\hat{T}$ bezeichnet. $\square$

Definition 6.3 Seien M, N höchstens abzählbare Mengen.
Eine Funktion $f : M \to N$ heißt berechenbar, falls es eine Turingmaschine gibt, die zu jedem Eingabecode eines Elementes von M einen Ausgabecode zu einem Element aus N berechnet. $\square$

Man könnte nun einfach reelle Analysis betreiben, indem man $\Sigma := \mathbb{R}$ wählt und die bekannten Methoden für die Berechnungen auf $\mathbb{N}$ zu verallgemeinern sucht. Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen, die aus Grundsymbolen endlich generiert werden können, gibt es keine Möglichkeit, die reellen Zahlen durch ein endlich beschreibbares Verfahren aus einer endlichen Menge zu erzeugen. Daher widerspricht eine Verwendung von $\mathbb{R}$ als Teilalphabet der Intention, in allen wesentlichen Zügen die in der realen Welt existierenden oder wenigstens konstruierbaren Rechner zu modellieren. Daher schränkt man die Definition der Turingmaschinen auf endliche Alphabete und Zustandsmengen ein.
Mit den so beschränkten Turingmaschinen wird im Folgenden zunächst ein Berechenbarkeitsbegriff für Cauchy-Folgen rationaler Zahlen definiert. Die rationalen Zahlen haben den wesentlichen Vorteil, dass sie, im Gegensatz zu den reellen Zahlen, abzählbar sind und sich daher, wie bereits erwähnt, endlich kodieren lassen. Damit kann eine reelle Zahl als Turingmaschine aufgefasst werden, die eine ihrer $\mathbb{Q}$-Cauchy-Folgen berechnet. Um die Betrachtungen weiter zu vereinfachen, verwendet man auch nur eine Teilmenge der rationalen Zahlen:

Definition 6.4 $\mathbb{D} := \{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ heißt Menge der dyadischen Brüche bzw. Binärbrüche,
$\mathbb{D}_n := \{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ heißen dyadische Brüche der Genauigkeit n. $\square$

Aus dieser Definition folgen sofort einige nützliche Fakten:

Lemma 6.5 *Es gilt:*

- $\mathbb{D}$ *ist dicht in* $\mathbb{R}$, *d.h.* $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$ *und für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x < y$ *gibt es ein* $d \in \mathbb{D}$ *mit* $x \leq d \leq y$

- $\mathbb{D}_n$ *ist über ganz* $\mathbb{R}$ *gleichverteilt in dem Sinne, dass für jedes* $d \in \mathbb{D}_n$ *gilt:*
$\forall d' \in \mathbb{D}_n \setminus \{d\} : \ |d - d'| \geq 2^{-n}$ *und* $\exists d' \in \mathbb{D}_n \setminus \{d\} : \ |d - d'| = 2^{-n}$

- $\mathbb{D}_n \subseteq \mathbb{D}_{n+1}$ *und* $\mathbb{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_n$ $\square$

Die wesentliche Vereinfachung beim Benutzen von dyadischen Brüchen im Gegensatz zu der vollen Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus der Möglichkeit, auf einfache Weise Suchen zu verfeinern. Man kann beispielsweise auf einem Intervall I suchen, indem man zunächst auf $I \cap (\mathbb{D}_n \setminus \mathbb{D}_{n-1})$ schrittweise sucht, also mit Genauigkeit 2^{-n}, und falls die Suche nicht erfolgreich ist, mit $n \leftarrow n+1$ das Suchraster verfeinert. Eine solche Abstiegsmöglichkeit auf ganz $\mathbb{Q}$ herzustellen, ist wesentlich komplizierter.
Auf diesen Binärbrüchen kann nun die übliche Konvergenzdefinition leicht abgeändert werden:

Definition 6.6 (vgl. Def. 2.1 in [Ko91]) Eine Folge $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ heißt *dyadische Cauchy-Folge* mit Grenzwert x, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl $\Phi(n) \in \mathbb{D}_n$, als auch $|\Phi(n) - x| \leq 2^{-n}$ gilt. Die Menge aller solchen Folgen wird mit $\mathbb{CF}_x$ bezeichnet.
Eine Folge $\Phi \in \mathbb{CF}_x$ heißt berechenbar, wenn eine Turingmaschine T existiert, die zu jeder gegebenen Eingabe $n \in \mathbb{N}$ die Ausgabe $\Phi(n)$ berechnet, d.h. $\Phi = \hat{T}$. □

Damit ist klar, wann eine reelle Zahl berechenbar ist:

Definition 6.7 Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt berechenbar, falls $\mathbb{CF}_x$ eine berechenbare Folge Φ enthält. □

Nach dieser Definition kann man sich die reellen Zahlen als Binärentwicklungen vorstellen. Die berechenbaren reellen Zahlen bestehen in dieser Sichtweise aus einer natürlichen Zahl und einer berechenbaren Folge in $\{0, 1\}$, also der charakteristischen Funktion einer rekursiven Menge.
Diese Betrachtungsweise hat den entscheidenden Nachteil, dass sehr viele (fast alle) reelle Zahlen nicht berechenbar sind. Schließlich gibt es nur abzählbar viele berechenbare reelle Zahlen. Arbeitet man ausschließlich mit berechenbaren Zahlen, kann man diese zwar darstellen, aber nur sehr wenig Analysis betreiben, da Funktionen, die auf eine reelle Zahl angewandt werden, nicht notwendigerweise ein berechenbares Ergebnis liefern müssen. Es ist daher sinnvoll, einen weiteren Maschinentyp, genannt Orakel-Turingmaschine, einzuführen, damit man Funktionen und Operatoren auf ihrem gesamten Definitionsbereich definieren kann. Z.B. übergibt man einer solchen Maschine, die eine reelle Funktion berechnet, als Eingabe eine beliebige (also nicht nur berechenbare) binäre Cauchy-Folge und eine Genauigkeitszahl. Mit diesen Informationen berechnet sie dann eine Approximation an den Funktionswert der reellen Funktion. Eine Orakel-Turingmaschine ist also eine Turingmaschine, deren Zustandsmenge um sogenannte Orakelzustände erweitert ist. Außerdem besitzt sie zu jedem Orakelzustand ein zusätzliches Orakelband, dessen Konfiguration bei Eintreten des zugehörigen Orakelzustands sofort (in einem Schritt) gemäss der Wahl des aufgerufenen Orakels ersetzt wird. Die Konfiguration des Orakelbandes besteht vor dem Aufruf aus der Eingabe an das Orakel und danach aus dessen Ausgabe. Auf den Orakelbändern kann daher nur das Eingabealphabet verwendet werden. Die Orakel sind nicht fest mit einer Orakel-Turingmaschiene verbunden, sie werden daher wie zusätzliche Eingaben betrachtet. Ein Orakel ist also eine Art austauschbarer Koprozessor für eine Turingmaschine, der eine Funktion $\omega : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (oder mit anderen kodierbaren Mengen) „berechnet“. In diesem Bild friert der Hauptprozessor

während des Koprozessorlaufs gewissermaßen ein und fährt erst dann fort, wenn der Koprozessor seine Ersetzung beendet hat.

Definition 6.8
Eine Orakel-Turingmaschine T ist gegeben durch ein 8-Tupel

$$M = (Z, \Omega, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$$

Hierbei sind

- Z eine Menge von Zuständen,
- $\Omega \subseteq Z$ eine Menge von Orakelzuständen,
- Σ das Eingabealphabet,
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ das Arbeitsalphabet,
- $\delta : (Z \times B) \to \mathcal{P}(Z \times B \times \{L, R, N\}^{n+2})$ die Überführungsfunktion, wobei $B := (\Gamma^n \times \Sigma^{2+|\Omega|})$ den Bandstatus und $\{L, R, N\}^{n+2+|\Omega|}$ den Wechsel der Zustände bezeichnet,
- $z_0 \in Z$ der Startzustand,
- $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ das Blank und
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände.

Ein Lauf einer Orakel-Turingmaschine wird analog zur Definition der Standard-Turingmaschine durch $h = T[\Omega](k)$ dargestellt. Hierbei wird die Menge der übergebenen Orakel mit der Menge der Orakelzustände identifiziert. $\Box$

Der Einfachkeit halber schreibt man, falls $\Omega = \{\Phi_1, \dots, \Phi_r\}$ ist, auch $T[\Phi_1, \dots, \Phi_r]$. Weiter identifiziert man wieder $\hat{T}[\Omega] := (T[\Omega](k))_k$, falls die Orakel-Turingmaschine für jede Eingabe $k \in \mathbb{N}$ terminiert.
Man erhält also aus einer Orakel-Turingmaschine durch Einsetzen von bestimmten Orakeln eine Maschine, die sich wie eine normale Turingmaschine verhält. Aufgrund der Endlichkeitsforderung ist klar, dass Orakel nur aus Funktionen von einer höchstens abzählbaren Menge in eine andere abzählbare Menge bestehen können.

Beispiel 6.9 Sei eine Orakel-Turingmaschine wie folgt gegeben:
Zu einem Orakel $\chi : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ und Parameter k wird

$$T[\chi](k) = \sum_{i=1}^{k} \chi(i) \cdot 2^{-i}$$

berechnet. Sei A eine nicht rekursive Menge und sei χ_A deren charakteristische Funktion. Damit ist auch die Zahl $a := \sum_{i \in A} 2^{-i}$ nicht berechenbar.
Es gilt: $\hat{T}[\chi_A] \in \mathbb{CF}_a$. Im Sinn von Definition 6.7 heißt dies, dass die Orakel-Turingmaschine T mittels des Orakels χ_A die nichtberechenbare reelle Zahl a berechnet. $\Box$

Dieser Maschinentyp ist nun mächtig genug, um Funktionen auf beliebigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ berechnen zu können.

Definition 6.10 (vgl. Def. 2.11 in [Ko91])
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt berechenbar, wenn es eine Orakel-Turingmaschine T gibt, so dass für jede reelle Zahl $x \in A$ und jede Folge $\Phi \in \mathbb{CF}_x$ die Folge $\hat{T}[\Phi] \in \mathbb{CF}_{f(x)}$ ist. Diese Definition kann wie üblich auf höhere Dimensionen erweitert werden. □

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Definition ist die Stetigkeit jeder berechenbaren Funktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Dies ist aber keine Einschränkung, da der in dieser Arbeit betrachtete Satz von Sharkovsky ohnehin nur für stetige Funktionen sinnvoll ist.
Außerdem gibt es weitere Probleme, falls man Funktionen als Orakel übergeben will. Man kann auf ein Orakelband nur beispielsweise eine dyadische Zahl und eine Genauigkeit schreiben, mit der der Funktionswert approximiert werden soll. Mit dieser Genauigkeit weicht allerdings die Rückgabe des Orakels vom im Allgemeinen nicht gesuchten Funktionswert des Binärbruches ab. Man bekommt also zu $q \in \mathbb{D}$ mit $|x - q| < 2^{-k}$ und der Genauigkeit n einen Wert z mit $|f(q) - z| < 2^{-n}$. Über den Abstand $|f(x) - z|$ weiß man allerdings noch nichts. Da man aber ausschließlich Annäherungen an den Wert einer echten reellen Zahl, d.h. im betrachteten Fall des Grenzwerts einer binären Cauchy-Folge, benutzen kann, benötigt eine Turingmaschine eine Möglichkeit, die Genauigkeit des an das Orakel übergebenen Bruches in Abhängigkeit von der benötigten Approximationsgenauigkeit (oben: k) zu bestimmen. Für stetige Funktionen gibt es dafür eine Möglichkeit mittels Modulus-Funktionen.

Definition 6.11 (vgl. Def. 2.12 in [Ko91]) Sei $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Modulus-Funktion von f auf $[a, b]$, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|x - y| \leq 2^{-M(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$$

□

Definition 6.12 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ein Paar (M, Ψ), wobei $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\Psi : (\mathbb{D} \cap [a, b]) \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gilt, heißt Darstellung von f, falls gilt

- M ist eine Modulus-Funktion von f auf $[a, b]$ und
- für alle $d \in \mathbb{D} \cap [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\Psi(d, n) - f(d)| \leq 2^{-n}$.

Die Menge aller solchen Paare wird mit $\mathbb{DAR}_f$ bezeichnet. □

Jede stetige Funktion, die ein abgschlossenes Intervall als Definitionsbereich hat, besitzt eine Darstellung, allerdings sind nicht alle (meistens sogar keine) davon berechenbar. Will man die Definition auf totale Funktionen erweitern, so kann man leider aufgrund der obigen Überlegungen nur gleichmäßig stetige Funktionen darstellen, da ansonsten im Allgemeinen keine zugehörige Modulus-Funktion existiert. Berechenbare Funktionen lassen sich mittels solcher Darstellungen nun leicht finden:

Lemma 6.13 *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann berechenbar, wenn es berechenbare Funktionen $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\Psi : (\mathbb{D} \cap [a, b]) \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ gibt, so dass (M, Ψ) eine Darstellung von f ist.* □

Beweis Dies ist Korollar 2.14 in [Ko91]. ■

Statt einer (beliebigen) stetigen Funktion, die als Orakel übergeben wird, werden also zwei Orakel übergeben: eines, das die Modulus-Funktion bestimmt, und ein weiteres, das die Funktionenwerte rationaler Eingaben mit einer angegebenen Genauigkeit approximiert.
Man kann nun die allgemeine Fragestellung zum Satz von Sharkovsky so ausdrücken:

> Gibt es eine Orakel-Turingmaschine, die zu einer gegebenen stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, einem gegebenen periodischen Punkt der primitiven Ordnung n und einer gegebenen gesuchten Ordnung m ($n \prec m$) eine Folge berechnet, die in einem $\mathbb{CF}_y$ liegt, wobei y ein periodischer Punkt der primitiven Ordnung m ist?

Leider kann diese Frage nach derzeitigem Stand nicht mit Sicherheit beantwortet werden, da das Konvergenzverhalten berechenbarer (allgemeiner) Cauchy-Folgen nicht berechenbar abgeschätzt werden kann. Allerdings gilt eine schwächere Fassung, die im weiteren Verlauf bewiesen wird:

> Es gibt eine Orakel-Turingmaschine, die zu einer gegebenen stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, einem gegebenen periodischen Punkt der primitiven Ordnung n und einer gegebenen gesuchten Ordnung m ($n \prec m$) eine Folge (y_k) berechnet, die gegen ein y konvergiert, das ein periodischer Punkt der primitiven Ordnung m ist.

Die hier getroffene Einschränkung ist sehr gravierend. Es kann nämlich, wie bereits erwähnt wurde, keine Abschätzung angegeben werden, ab wann die Folgenglieder sich tatsächlich in der Nähe eines solchen y befinden. Insbesondere gilt im Allgemeinen nicht $(y_k) \in \mathbb{CF}_y$.
Die Orakel-Turingmaschine, die die genannte Folge berechnet, wird im weiteren Verlauf so angegeben, dass sie die Schritte des klassischen Beweises nachahmt. Ein wesentlicher Schritt des Beweises ist das Eingrenzen von Intervallen nach Lemma 3.4. Hierzu dient der folgende *while*-Algorithmus, der auf die allgemein bekannten Weisen in eine Turingmaschine transformiert werden kann.

Lemma 6.14 *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $[c, d] \subseteq f([a, b])$ gilt, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $Q \subseteq [a, b]$ mit*

i) $|\max f(Q) - d| \leq 2^{-k}$ *und* $|\min f(Q) - c| \leq 2^{-k}$

ii) es existieren $q_1 \in Q$ mit $|f(q_1) - d| \leq 2^{-k}$ und $q_2 \in Q$ mit $|f(q_2) - c| \leq 2^{-k}$, so dass gilt $\{q_1, q_2\} = \{\max Q, \min Q\}$

iii) aus $q \in Q \setminus \{\max Q, \min Q\}$ *folgt* $c < f(q) < d$

iv) für $q, q' \in Q$ *mit* $\neg\exists q'' : (q < q'' < q' \vee q' < q'' < q)$ *folgt* $|q' - q| \leq 2^{-k}$

und einen (Turing-) Algorithmus, der einen Code für eine derartige Menge berechnet. □

BEWEIS Der Algorithmus sei gegeben durch:

Require: $(M, \Psi) \in \mathbb{DAR}_f$ Funktionen-Orakel
Require: $A \in \mathbb{CF}_a, B \in \mathbb{CF}_b, C \in \mathbb{CF}_c, D \in \mathbb{CF}_d$ Orakel und
Require: k Parameter (Register)

```
w ← k + 1;
while TRUE do
  x ← A(w); b' ← B(w); c' ← C(w); d' ← D(w);
  max ← UNDEF; min ← UNDEF;
  while x ≤ b' do
    v ← Ψ(x, w);
    e ← |v − c'|;
    if e ≤ 2^{−k} then
      min ← x;
    end if
    e ← |v − d'|;
    if e ≤ 2^{−k} then
      max ← x;
    end if
    if max ≠ UNDEF AND min ≠ UNDEF then
      return (min, max, w)
    end if
    if v > d' ∨ v < c' then
      min ← UNDEF;
      max ← UNDEF;
    end if
    x ← x + 2^{−w}
  end while
  w ← w + 1
end while
```

Da alle verwendeten Register dyadische Brüche oder ganze Zahlen beinhalten, sind die verwendeten Vergleiche entscheidbar.

Beh: Der Algorithmus terminiert.

Bew:

> Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es nach Lemma 3.4 ein minimales Intervall $K \subseteq [a, b]$ mit $f(K) = [c, d]$.
> Da $D := \mathbb{D} \cap K$ dicht in K liegt, gibt es wieder mit der Stetigkeit von f ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists x, y \in D : (|f(x) - c| \leq 2^{-k} \wedge |f(y) - d| \leq 2^{-k})$.
> Für $z \in D$ gilt aufgrund der Minimalität von K, dass $c < f(z) < d$

ist und damit jedes $q \in \mathbb{D}_k$ mit $|q - f(z)| \leq 2^{-k}$ höchstens um 2^{-k} von c oder d abweichen kann. Da aber D eine endliche Menge ist, gibt es eine maximale Teilmenge, die in einer Schleife mit $w \geq n$ das max und min setzt (eines von beiden einmalig), aber nicht mehr bei Werten dazwischen zurückgesetzt werden kann. Damit terminiert der Algorithmus (spätestens) falls $w \geq n$.

Beh: Die Menge $Q := \{q \mid q \in \mathbb{D}_w \;\wedge\; \min \leq q \leq \max\}$ hat die geforderten Eigenschaften.
Bew:

Ad (i),(ii) und (iv): sofort nach Wahl von Q.
Ad (iii): Angenommen es gibt ein $q \in Q \setminus \{\max Q, \min Q\}$ mit $c > f(q)$ oder $d < f(q)$.
Angenommen $c \geq f(q)$: Falls $|c - f(q)| \leq 2^{-k}$, gilt auch für jede Approximation $c' \in \mathbb{D}_w$ von c und $v \in \mathbb{D}_w$ von $f(q)$, dass $|c' - v| \leq 2^{-k}$ ist und damit nach Durchführung des Algorithmus $q \in \{\max, \min\}$ gilt. Widerspruch.

Der Fall $d \leq f(q)$ folgt analog. ■

Der zweite wesentliche Schritt besteht darin, mittels wiederholter Anwendung der Intervalleingrenzung zu einem Zyklus von Intervallen, der durch Suche eines primitiven Zyklus im (f, x) zugehörigen Graphen oder im $\tau_{(f,x)}$-Graphen gefunden wurde, eine Einschränkung des Anfangsintervalls zu definieren. Diese Einschränkung muss so gewählt werden, dass bei iterierter Anwendung von f^k auf einen Wert im Anfangsintervall nur das k-te Intervall im Zyklus getroffen werden kann. Anschließend bestimmt man in dieser Einschränkung einen periodischen Punkt.

Lemma 6.15 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und x ein periodischer Punkt von f der primitiven Ordnung n, so dass $f^*(x) \subseteq I$ gilt. Sei $\langle [a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m] \rangle$ ein primitiver Zyklus der Länge m im (f, x) zugehörigen Graphen. Es gibt einen Algorithmus, der zu gegebener Genauigkeit 2^{-k} einen Punkt $d \in \mathbb{D} \cap [a_1, b_1]$ berechnet, mit $|f^m(d) - d| \leq 2^{-k}$.* □

Beweis Folgender Algorithmus

Require: $(M, \Psi) \in \mathbb{DAR}_f$ als Funktionen-Orakel,
Require: $A_1 \in \mathbb{CF}_{a_1}, \ldots A_m \in \mathbb{CF}_{a_m}, B_1 \in \mathbb{CF}_{b_1}, \ldots B_m \in \mathbb{CF}_{b_m}$ als Orakel und
Require: k als Parameter (Register)

```
w ← k + 1;
for i ← 0 . . . m do
  w ← M(w)
end for
if w < k + 1 then
  w ← k + 1
end if
```

Finde mit dem Algorithmus aus Lemma 6.14 $(\min_m, \max_m, w_m)$ zu (M, Ψ)
    mit $[a_1, b_1] \subseteq f([a_m, b_m])$ zur Genauigkeit 2^{-w-m}
for $i \leftarrow m \dots 2$ **do**
    Finde mit dem Algorithmus aus Lemma 6.14 $(\min_i, \max_i, w_i)$ zu (M, Ψ)
        mit $[\min_i, \max_i] \subseteq f([a_{i-1}, b_{i-1}])$ zur Genauigkeit 2^{-w-i}
end for
$d \leftarrow \min_1$
while $d \leq \max_1$ **do**
    $p \leftarrow \Psi(d, w)$
    for $i \leftarrow 1 \dots m-1$ **do**
        $p \leftarrow \Psi(p, w)$
    end for
    $e \leftarrow |p - d|$
    if $e \leq 2^{-k}$ **then**
        return d
    end if
    $d \leftarrow d + 2^{-w_1}$
end while

Der Schritt $[\min_i, \max_i] \subseteq f([a_{i-1}, b_{i-1}])$ in der for-Schleife ist nicht ganz richtig, denn $\min_i$ oder $\max_i$ könnte außerhalb des Intervalls $[a_i, b_i]$ liegen. Der Algorithmus behält trotzdem alle nötigen Eigenschaften, da die $\max_i$ oder $\min_i$ höchstens 2^{-w-i} von den Intervallgrenzen abweichen, die sie annähern. Da im Folgedurchlauf ausreichend ungenauer gesucht wird, ändert dieser Fehler nichts am Verhalten des Algorithmus.
Es bleibt nur noch die Termination zu zeigen:
Sei $w := \max\{M^m(k+1), k+1\}$ (wie in der for-Schleife berechnet) und $Q := [\min_1, \max_1] \cap \mathbb{D}_w$.
Nach Lemma 3.8 gibt es einen periodischen Punkt $y \in [a_1, b_1]$ von f der primitiven Ordnung m.
Nach Wahl von Q und w gilt $\forall q \in Q : |q - y| \leq 2^{-w} \rightarrow |f^m(q) - f^m(y)| \leq 2^{-k-1}$.
Mit $f^m(y) = y$ und q wie gefordert, folgt damit $|f^m(q) - y| \leq 2^{-k-1}$.
Also gilt $|f^m(q) - q| \leq 2^{-k}$. ∎

Bemerkung 6.16 Da der Algorithmus aus Lemma 6.14 bis auf die Genauigkeitsänderung dieselben Intervallgrenzen liefert, findet der Algorithmus aus Lemma 6.15 eine Folge $(d_k) \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ (d_k zur Genauigkeit 2^{-k}), die immer gegen den kleinstmöglichen periodischen Punkt $y \in [\min_1, \max_1]$ der geforderten primitiven Ordnung konvergiert. Da leider nicht abgeschätzt werden kann, wann die Folge in die unmittelbare Umgebung von y eintritt (und verbleibt), ist mit dieser Information keine Folge in $\mathbb{CF}_y$ definierbar. Trotzdem ist der Grenzwert Orakel-berechenbar, da ja aufgrund der Konvergenz der Folge ein $l \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq l$ die Folgenglieder höchstens um 2^{-k} vom Grenzwert der Folge abweichen.
Für dieses l liegt die Folge (r_k) in $\mathbb{CF}_y$, mit

$$r_k := \begin{cases} \lfloor (d_{k+1} \cdot 2^k) \rfloor \cdot 2^{-k} & \text{, falls } \ k < l \\ \lfloor (d_{n+1} \cdot 2^k) \rfloor \cdot 2^{-k} & \text{, falls } \ k \geq l \end{cases} .$$

Da die in der Definition der r_k geleistete Umformung auch durch eine Turingmaschine geleistet werden kann, ist y also mit den Orakeln f und x, sowie den Parametern n und m Orakel-berechenbar, wobei l fest kodiert wird. $\square$

Zusammengefasst gilt also

Satz 6.17 (Sharkovsky) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechenbar mit berechenbarem periodischen Punkt x primitiver Ordnung n. Dann gibt es zu $m \in \mathbb{N}$ mit $n \prec m$ einen berechenbaren periodischen Punkt der Ordnung m.* $\square$

Beweis
Man bestimmt den $\tau_{(f,x)}$-Graphen G durch Sortieren des Orbits (man beachte, dass die Ordnung von x nicht feststellbar ist, da die Frage, ob $f^n(x) = x$ gilt, unentscheidbar ist! Man benötigt also n als Eingabe). Nach Lemma 3.24 gibt es einen primitiven Zyklus Z der Länge m in G. Dieser ist mit den üblichen Graphenalgorithmen auffindbar (vgl. [Heu03]), indem man etwa zuerst alle kürzesten Zyklen mittels Tiefensuche findet und anschließend diese geeignet kombiniert.
Zu Z gehört ein Zyklus im (f, x) zugeordneten Graphen, der durch die bereits berechnete Ordnung des Orbits von x gefunden werden kann. Sei zu $k \in \mathbb{N}$, q_k der durch Lemma 6.15 zur Genauigkeit k gefundene Sharkovsky-Zeuge.
Da f und x berechenbar sind, können diese fest in die bisher definierte Turingmaschine eincodiert werden. Daher gibt es nach Bemerkung 6.16 eine Turingmaschine, die zu einem periodischen Punkt y primitiver Ordnung m eine Folge in $\mathbb{CF}_x$ berechnet. $\blacksquare$

Bezüglich der Berechenbarkeit stellt sich noch die Frage, ob es zu jedem periodischen Punkt einer primitiven Ordnung auch einen berechenbaren Punkt derselben primitiven Ordnung gibt. Dies muss im Allgemeinen negativ beantwortet werden.

Lemma 6.18 *Es gibt eine berechenbare Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die überabzählbar viele Fixpunkte hat, von denen keiner berechenbar ist.* $\square$

Beweis Nach Korollar 4.3 in [Ko91] gibt es eine berechenbare Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die überabzählbar viele Nullstellen hat, von denen keine berechenbar ist. Damit hat die berechenbare Funktion $f(x) := g(x) + x$ keine berechenbaren Fixpunkte. $\blacksquare$

Allerdings hat dieses Ergebnis keine großen Nachteile, da man von den meisten in der Wirklichkeit auftretenden Funktionen zeigen kann, dass sie nur abzählbar viele periodische Punkte einer gewissen Ordnung haben können. Hinreichende Kriterien wären zum Beispiel, dass es nur abzählbar viele Nullstellen der ersten Ableitung gibt oder die Funktion nicht konstant und analytisch ist, da alle Iterationen der Funktion in beiden Fällen in allen Punkten ausreichend variabel sind, d.h. zu jedem x im Definitionsbereich und $k > 0$ gibt es eine Umgebung U von x mit $\forall y \in U \setminus \{x\} : \ (f^k(y) \neq f^k(x))$.
Im folgenden wird nämlich gezeigt, dass eine berechenbare Funktion, die keinen berechenbaren periodischen Punkt einer Ordnung hat, bereits überabzählbar viele periodische Punkte dieser Ordnung besitzt.

Definition 6.19 Eine Menge M heißt

- rekursiv offen, falls $M = \emptyset$ ist oder falls eine berechenbare Folge $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ existiert, mit
  - für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Phi(2n) < \Phi(2n+1)$ und
  - $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} (\ \Phi(2n), \Phi(2n+1)\ )$ (Vereinigung offener Intervalle).
- rekursiv abgeschlossen, falls $\mathbb{R} \setminus M$ rekursiv offen ist. □

Lemma 6.20 *Sei $M \subseteq [0,1]$ nichtleer. Dann sind äquivalent:*

- *M ist rekursiv abgeschlossen*
- *es gibt eine berechenbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass M genau aus den Nullstellen von f besteht.* □

Beweis Theorem 4.1 in [Ko91]. ■

Lemma 6.21 *Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ berechenbar.*

- *Hat f eine isolierte Nullstelle, so ist diese berechenbar.*
- *Hat f nur endlich viele Nullstellen, so sind diese berechenbar.*
- *Hat f höchstens abzählbar viele Nullstellen, so gibt es auch abzählbar viele berechenbare Nullstellen.* □

Beweis siehe Korollar 2.12 in [Ko98] ■

Korollar 6.22 *Sei f eine berechenbare Funktion mit einem periodischen Punkt x der Ordnung n. Dann hat f entweder einen berechenbaren periodischen Punkt der Ordnung n oder überabzählbar viele unberechenbare.* □

Beweis Mit f ist auch $g(x) := f^n(x) - x$ berechenbar. Die Behauptung folgt damit aus Lemma 6.21, da die Nullstellen von g gerade die periodischen Punkte von f der Ordnung n sind. ■

Die bewiesene Aussage läßt sich nicht sofort auf periodische Punkte primitiver Ordnung erweitern. Allerdings gilt der folgende Satz, der die Berechenbarkeit der periodischen Punkte einer höheren Ordnung garantiert.

Satz 6.23 *Sei $n \geq 2$ und f eine berechenbare Funktion mit einem periodischen Punkt x der primitiven Ordnung n. Dann hat f für jedes m mit $n \prec m$ entweder (mindestens) einen berechenbaren periodischen Punkt primitiver Ordnung m oder überabzählbar viele unberechenbare.* □

Beweis
Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ der sortierte x-Orbit. Sei $Z := \langle [a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m] \rangle$ ein im (f, x) zugehörigen Graphen liegender primitiver m-Zyklus nach Lemma 3.24.
Sei $[a, b] \subseteq [a_1, b_1]$ das Intervall aus Lemma 3.5 und y ein periodischer Punkt der Ordnung m in diesem Intervall. Dann gibt es, da $\mathbb{D}$ dicht in $\mathbb{R}$ lieg, $q, r \in \mathbb{D}$ mit $a \leq q < x < r \leq b$.
Da mit f auch $g(x) := f^m(x) - x$ berechenbar ist, ist nach Lemma 6.20 die Menge $M' := \{x|\ g(x) = 0\}$ rekursiv abgeschlossen.
Damit auch die Menge $M := M' \cap [q, r]$. Dies ist die Menge aller periodischen Punkte von f der Ordnung m. Nach Wahl von q und r sind alle Punkte in n von primitiver Periode m.
Ist N höchstens abzählbar, so ist nach Lemma 6.20 der erste Teil bewiesen.
Sei N überabzählbar und beinhalte keinen berechenbaren Punkt, so folgt der zweite Teil, ansonsten wieder der Erste. ■

Ob zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine berechenbare Funktion f existiert, die überabzählbar viele unberechenbare periodische Punkte der primitiven Ordnung n, aber keinen berechenbaren enthält, ist derzeit noch offen. Die in diese Richtung laufenden Konstruktionsversuche verfehlten leider ihr Ziel.

Ein weiterer interessanter Themenbereich im Kontext der Berechenbarkeitstheorie ist die Komplexitätsanalyse. So kann man fragen:

> Kann man, falls eine Funktion in einer bestimmten Komplexitätsklasse liegt, bestimmen, in welcher Komplexitätsklasse ihre periodischen Punkte, sofern diese berechenbar sind, liegen?

Im Folgenden werden einige Resultate über die in polynomialer Zeit berechenbaren Funktionen aufgeführt.

Definition 6.24 Sei T eine deterministische Turingmaschine. Gilt $\mathrm{time}(e) \leq p(|e|)$, für ein Polynom $p(n) \in \mathbb{N}[n]$, so heißt T in polynomialer Zeit berechenbar.
Hierbei bezeichnet $\mathrm{time}(e)$ die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine ausführen muss, um bei Eingabe e einen Endzustand zu erreichen und $|e|$ die Länge der Eingabe.
Sei O eine Orakel-Turingmaschine. O heißt in polynomialer Zeit berechenbar, falls für eine beliebige Menge von Orakeln Ω die Turingmaschine $T[\Omega]$ in polynomialer Zeit berechenbar ist.
Eine berechenbare Folge, Funktion, reelle Zahl oder ein berechenbarer Operator heißt in polynomialer Zeit berechenbar, falls eine zugehörige Turing oder Orakel-Turingmaschine dies ist. □

Der algebraische Fundamentalsatz besagt bekannterweise, dass jedes reelle Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt. Eine interessante Variante davon gilt in der Komplexitätstheorie:

Satz 6.25 (Fundamentalsatz für Polynomialzeit-Funktionen)
Alle Nullstellen einer analytischen (d.h. unendlich oft differenzierbaren), in polynomialer Zeit berechenbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind in polynomialer Zeit berechenbar. □

BEWEIS siehe [Ko91] Theorem 4.11. ■

Aus diesem zentralen Ergebnis folgt unmittelbar, dass die periodischen Punkte einer analytischen, in polynomialer Zeit berechenbaren Funktion in eben diese Komplexitätsklasse eingeordnet werden können.

Korollar 6.26 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in polynomialer Zeit berechenbar und analytisch. Hat f einen periodischen Punkt x der Ordnung n, so sind alle periodischen Punkte der Ordnung m, mit $n \preceq m$, in polynomialer Zeit berechenbar.* □

BEWEIS Mit f ist auch $g(x) := f^m(x) - x$ analytisch und in polynomialer Zeit berechenbar. Da alle periodischen Punkte der Ordnung m als Nullstellen von g auftreten, folgt aus Satz 6.25 die Behauptung. ■

Die in Kapitel 3 angegebenen, zum Beweis der Schärfe des Satzes von Sharkovsky konstruierten Gegenbeispiele können ebenfalls in die Klasse der in polynomialer Zeit berechenbaren Funktionen eingeordnet werden.

Satz 6.27 *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine in polynomialer Zeit berechenbare Funktion $f : [1, n] \to [1, n]$ mit den Eigenschaften*

- *Zu jedem m, $n \preceq m$, hat f einen periodischen Punkt primitiver Ordnung m.*
- *Zu jedem m, $m \prec n$, hat f keinen periodischen Punkt primitiver Ordnung m.*
- *Alle periodischen Punkte von f sind in polynomialer Zeit berechenbar.* □

BEWEIS Sei $f := \hat{\tau}$, die in Satz 3.28 gefundene Funktion. Offensichtlich erfüllt f die Bedingungen von Theorem 2.22 in [Ko91]. ■

7 Ausblick

In dieser Arbeit konnten nicht alle Fragen bezüglich des untersuchten Satzes von Sharkovsky vollständig beantwortet werden. Allein die Tatsache ist mindestens verwunderlich, dass in jedem der untersuchten Themengebiete außer der klassischen Mathematik die Stetigkeit als alleinige Voraussetzung verloren gegangen ist und durch die stärkere Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit ersetzt werden musste. Diese Einschränkung ist in der Berechenbarkeitstheorie nicht ersetzbar, da es auf dem derzeitigen Stand dieses Bereichs nicht möglich ist, auf die Existenz einer Modulus-Funktion in den Darstellungen von Funktionen zu verzichten.

In der konstruktiven Mathematik lässt sich im System Bish zumindest sagen, dass der Satz von Sharkovsky für stetige Funktionen den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen impliziert. Dies folgt direkt aus dem Beweis von Lemma 5.22. Der konstruktive Status des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen, also die Frage, mit welchem Allwissenheitsprinzip dieser äquivalent ist, ist für das System Bish noch nicht geklärt. Es ist allerdings zu erwarten, dass dieser Satz ebenfalls auf derselben Nichtkonstruktivitätsstufe mit dem Satz von Sharkovsky für stetige Funktionen steht.

In der reversen Mathematik geht man derzeit von der Vermutung aus, dass der Satz von Sharkovsky tatsächlich über dem System RCA_0 äquivalent mit WKL_0 ist. Um dies zu zeigen, ist es wahrscheinlich erforderlich, aus einem unendlichen, binären Baum ohne Pfad ein Sharkovsky-Gegenbeispiel zu konstruieren. Eine starker Indikator für diese Vermutung wäre es, ein RCA_0-Modell anzugeben, in dem der Satz von Sharkovsky falsch ist. Dann wäre der Satz wenigstens von RCA_0 separiert.

Auch das Komplexitätsverhalten der periodischen Punkte jenseits der in Polynomialzeit berechenbaren Funktionen ist noch nicht untersucht. Nach den derzeit verfügbaren Resultaten über die Nullstellen nichtdeterministisch-polynomialzeit-berechenbarer Funktionen ist zu vermuten, dass für diese Klasse keine Aussage über die Kompexität der periodischen Punkte getroffen werden kann.
Weitere Forschungen auf dem Gebiet der Berechenbarkeitstheorie sind daher wünschenswert, da eine Möglichkeit zu Bestimmung periodischer Punkte in zahlreichen Anwendungsgebieten der diskreten Chaostheorie hilfreich wäre.

Literatur

[BC92] Block, L. S. ; Coppel, W. A.: *Dynamics in One Dimension.* Springer-Verlag, 1992 (Lecture Notes in Mathematics)

[BR87] Bridges, Douglas ; Richman, Fred: *Varieties of Constructive Mathematics.* Cambridge University Press, 1987

[BV00] Bridges, Douglas S. ; Vita, Luminita S.: *Techniques of Constructive Analysis.* Springer, 2000

[FSY93] Friedman, Harvey ; Simpson, Stephen G. ; Yu, Xiaokang: Periodic Points and subsystems of second-order arithmetic. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 62 (1993), S. 51–64

[Heu03] Heun, Volker: *Grundlegende Algorithmen.* Vieweg, 2003

[Ko91] Ko, Ker-I: *Compexity Theory of Real Functions.* Birkhäuser, 1991

[Ko98] Ko, Ker-I: Polynomial-time computability in analysis. In: Ershov, Y. L. (Hrsg.) ; Goncharov, S. S. (Hrsg.) ; Nerode, A. (Hrsg.) ; Remmel, J. B. (Hrsg.): *Handbook of Recursive Mathematics* Bd. 2. Elsevier Science B.V., 1998, Kapitel 19, S. 1271–1317

[LY75] Li, Tien-Yien ; Yorke, James A.: Period Three Implies Chaos. In: *The American Mathematical Monthly* 82-10 (1975), S. 985–992

[Sha64] Sharkovsky, Oleksandr M.: Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. In: *Ukranichkii Matematicheskii Zhurnal* 16 (1964), S. 61–71

[Sim99] Simpson, Stephen G.: *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Springer, 1999

[Ste77] Stefan, P.: A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. In: *Communications in Mathematical Physics* 54 (1977), S. 237–248

Index