

FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
INSTITUT FÜR INFORMATIK (MATHEMATISCHE MASCHINEN UND DATENVERARBEITUNG)

Lehrstuhl für Informatik 10 (Systemsimulation)



Kürzeste Beschreibungen endlicher Modelle

Christoph Matthias Felix

Studienarbeit

Kürzeste Beschreibungen endlicher Modelle

Christoph Matthias Felix

Studienarbeit

Aufgabensteller: Dr. Wolfgang Degen
Betreuer: Dr. Wolfgang Degen
Bearbeitungszeitraum: 1. Juli 2008 - 30. März 2009

Erklärung:

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 30. März 2009

.....

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	3
1	Einführung	5
1.1	Präliminarien zur First Order Logik	5
1.2	Einstimmung in das Thema	5
1.3	Kanonischer Satz für einen Graphen	7
2	Verkürzter kanonischer Satz	13
2.1	Beschreibung des verkürzten kanonischen Satzes	13
2.2	Beweis der Äquivalenz zweier Sätze	17
3	Betrachtung unterschiedlicher Modellklassen	21
3.1	Feste Anzahl verbindungsloser Knoten	21
3.2	Bäume	21
3.2.1	Beliebige nicht gewurzelte Bäume	21
3.2.2	Beliebige gewurzelte Bäume	24
3.2.3	Volle gewurzelte Bäume	26
4	Berechenbarkeit	29
4.1	Allgemeine Vorüberlegungen	29
4.2	Minimaler Satz der den Graphen, aber keine kleineren Graphen, beschreibt	29
4.3	Versuch eines Beweises	30
4.4	Beweis der Berechenbarkeit	31
5	Vokabular ohne Gleichheit	33
5.1	Neudefinitionen und Vorüberlegungen	33
5.2	Verkürzung der Charakterisierung	36
5.2.1	Berechenbarkeit	36
5.2.2	Verkürzung eines Satzes	36
6	Ausblick	39
	Literatur	41

INHALTSVERZEICHNIS

0 Einleitung

In dieser Exploration zu dem Thema "Kürzeste Beschreibungen endlicher Modelle" geht es darum, Modelle mit möglichst wenigen atomaren Formeln in First Order Logik (bzw. FO-Logik oder FOL) zu beschreiben, so dass auch nur das zu beschreibende Modell und isomorphe Modelle diesen Satz wahr machen. Es ist deswegen im Wesentlichen eine Exploration, da es in der Literatur, insbesondere in der Literatur zur Endlichen Modelltheorie, zu diesem Thema keine Vorarbeiten gibt. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf Graphen d.h. Strukturen mit einer zweistelligen Relation. Die zu beschreibenden Graphen haben gerichtete Kanten, wobei ungerichtete Kanten durch zwei gerichtete Kanten dargestellt werden können. Die Anzahl der Vorkommnisse atomarer Formeln in einem Satz nennt man die Länge des Satzes. Die deskriptive Komplexität eines Graphens ist die Länge des kürzesten Satzes, der diesen Graphen beschreibt.

Im ersten Kapitel wird für beliebige Graphen in Abhängigkeit der Knotenzahl eine obere Schranke für dessen deskriptive Komplexität angegeben. Diese obere Schranke soll nun allgemein verbessert, also nach unten gedrückt werden. Im zweiten Kapitel werden gewisse Klassen von Modellen behandelt, welche noch kürzer beschrieben werden können. Schließlich wird sogar für eine bestimmte Klasse von Modellen eine obere Schranke gefunden, die von der Knotenanzahl logarithmisch abhängt. Anschließend wird über die Berechenbarkeit der deskriptiven Komplexität nachgedacht, die schließlich auch bewiesen wird; der Beweis liefert aber keinen Algorithmus von praktischem Nutzen, da dieser eine extrem hohe Laufzeit hat. Im vierten und letzten Kapitel wird die gleichheitsfreie Logik umrissen. Zunächst wird erarbeitet, welche Graphen sich in der gleichheitsfreien Logik bis auf Isomorphie eindeutig beschreiben lassen, und anschliessend wird diese Darstellung auch noch ein wenig verkürzt.

Es liegt nahe, auch die Frage nach einer unteren Schranke der deskriptiven Komplexität zu behandeln. Jedoch können in der vorliegenden Arbeit zu dieser Frage noch keine Ergebnisse vorgelegt werden. Daher ist es auch nicht möglich, die Güte der vorgestellten Verkürzungsverfahren abzuschätzen.

1 Einführung

1.1 Präliminarien zur First Order Logik

Ein Vokabular τ ist die disjunkte Vereinigung von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und Konstantensymbolen. Etwas ungenau wird von Relationen, Funktionen und Konstanten gesprochen. Eine Relation oder Funktion hat als Argumente Konstanten oder Variablen. Die Stelligkeit von Relation bzw. Funktion ist bei einer konkreten Relation bzw. Funktion fest $st(R) \geq 1$ (bzw. $st(f) \geq 1$). In der Logik gibt es folgende Symbole: Variablen (v_1, v_2, v_3, \dots), das Gleichheitssymbol, Klammern, Konnektive ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$) und Quantoren (\exists, \forall). Ist ein Vokabular τ gegeben, so definieren wir die First Order Sprache $FOL[\tau]$ über τ .

Jede Variable und jede Konstante $c \in \tau$ für sich ist ein Term. Wenn t_1, t_2, \dots, t_n Terme sind und $f \in \tau$ eine Funktion mit $st(f) = n$, dann ist auch $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ein Term.

Seien s und t Terme, ist $s = t$ eine Atomformel. Außerdem ist, wenn t_1, t_2, \dots, t_n Terme sind und $R \in \tau$ eine Relation mit $st(R) = n$, auch $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ eine Atomformel. Jede Atomformel ist eine Formel. Wenn φ und ψ Formeln sind, ist auch deren Negation und Verknüpfung durch Konnektive eine Formel (z.B. $(\neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge \psi)$). Ebenso ist es eine Formel, wenn ein Allquantor bzw. Existenzquantor vor eine Formel gestellt wird ($\forall x \varphi$ bzw. $\exists \varphi$). Eine Variable, die im Bereich eines Quantors Auftritt, heißt gebundene Variable, ansonsten wird sie als freie Variable bezeichnet. Beinhaltet die Formel keine freien Variablen, so nennt man diese eine geschlossene Formel bzw. einen Satz.

Jede Formel hat zwei mögliche Wahrheitswerte, welche meistens als wahr oder falsch bezeichnet werden.

Ein Modell A für τ ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \langle A, R^A, \dots, f^A, \dots, c^A, \dots \rangle,$$

wobei A das Universum ist, d.h. die Menge der Dinge, die von dem Modell (z.B. als Knoten) interpretiert werden. Das Vokabular wird entsprechend im Universum interpretiert, d.h. ein n -stelliges Relationssymbol als eine Teilmenge R^A von A^n , das Funktionssymbol als $f^A: A^n \rightarrow A$, und die Konstanten als $c^A \in A$, wobei Konstanten auch als einstellige Relation angesehen werden können.

Im Folgenden wird allerdings nicht mehr notationell zwischen dem Modell und seinem Universum unterschieden und auch nicht zwischen Relationen und Relationssymbolen. Ausserdem wird statt R^A (bzw. f^A oder c^A) immer nur R (bzw. f oder c) geschrieben solange es klar ist, in welchem Modell die Interpretation stattfindet.

1.2 Einstimmung in das Thema

Es sollen nun Graphen durch Sätze, d.h. mit logischen Formeln ohne freie Variablen, beschrieben werden. Hierbei werden die Variablen als Knoten interpretiert, und in den meisten Fällen gibt es eine zweistellige Relation, bei der die Komponenten eines Paares als Anfangsknoten und Endknoten einer Kante interpretiert werden. Diese Relation wird durch die ganze Arbeit hindurch als $R(x, y)$ bezeichnet, wobei x der Startknoten und y der Endknoten ist. Wenn die Relation anders interpretiert wird, wird dies extra angeführt und mit einem anderen Relationssymbol beschrieben. Ein Graph G für unser Vokabular ist nun ein

Modell $G = \langle G, R^G \rangle$, wobei R^G eine zweistellige Relation ist.

Macht jetzt ein Graph G den Satz φ wahr, wird das formal geschrieben als: $G \models \varphi$. Man sagt dazu auch, φ ist eine Eigenschaft des Graphen G . $G \models \varphi$ wird wie üblich induktiv über den logischen Aufbau von φ definiert.

Definition 1.1 :

Gilt für jeden Graphen H , dass H den Satz φ genau dann wahr macht, wenn H isomorph ist zu G , so sagt man auch: φ charakterisiert den Graphen G .

Etwas formaler wird die Aussage, dass φ den Graphen G charakterisiert, folgendermaßen ausgedrückt:

Für alle Graphen H gilt: $H \cong G \Leftrightarrow H \models \varphi$

Allgemein nennt man zwei Modelle H und G isomorph, wenn es eine bijektive Funktion $f: H \rightarrow G$ gibt, so dass für alle Relationen R gilt:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n R^H(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow R^G(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$$

Nun sollen Graphen möglichst kurz mit Sätzen aus dem eben gegebenen Vokabular charakterisiert werden. Das bedeutet, es wird zunächst eine Zählweise benötigt. Die kürzesten Formeln sind die Atomformeln $x = y$ und $R(x, y)$. Jede Formel besteht aus Verknüpfungen dieser Atomformeln durch Konnektive und Quantoren.

Definition 1.2 :

Die Größe oder auch Länge einer Formel ist die Anzahl der Vorkommnisse atomarer Formeln.

Da nun jeder Graph durch mehrere syntaktisch verschiedene Sätze charakterisiert werden kann, wird die deskriptive Komplexität eines Graphen wie folgt definiert:

Definition 1.3 :

Die deskriptive Komplexität eines Graphen ist die Größe eines kürzesten Satzes, der den Graphen bis auf Isomorphie beschreibt, d.h. der den Graphen charakterisiert.

Damit die Größe eines Satzes von den verwendeten Konnektiven unabhängig ist, werden nur Konnektive zugelassen, die mit der gleichen Länge auch durch \wedge und \neg beschrieben werden können. Es sind also nur \wedge , \vee , \Rightarrow und \neg erlaubt. Konnektive wie \Leftrightarrow sind verboten, da man unter Verwendung dieses Konnektivs die Länge von Sätzen in unzulässiger Weise verkürzen kann. Aus ähnlichem Grund sind auch Funktionen verboten. Eine n -stellige Funktion kann durch eine $(n + 1)$ -stellige Relation ersetzt werden.

1.3 Kanonischer Satz für einen Graphen

Es soll nun ein Verfahren angegeben werden, wie man einen beliebigen Graphen mit n Knoten durch einen FO-Satz charakterisiert. Damit wird auch gleichzeitig bewiesen, dass jeder Graph charakterisierbar ist und somit jeder Graph eine eindeutige deskriptive Komplexität besitzt. Das Verfahren setzt zunächst die Anzahl der Knoten fest und beschreibt anschließend die Kanten.

Die Anzahl der Knoten kann man durch folgende zwei Aussagen bestimmen: "Der Graph hat höchstens n Knoten" und "der Graph hat mindestens n Knoten". Die erste Aussage kann man umformulieren zu: es gibt n Knoten, so dass jeder Knoten einer von diesen ist. Als logische Formel sieht dies folgendermaßen aus:

Formel 1.4 :

$$\exists o_1, o_2, \dots, o_n \forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x$$

Das \bigvee ist kein Existenzquantor (wie in manchen Büchern), sondern eine Kurzschreibweise für die iterierte binäre Disjunktion: $o_1 = x \vee o_2 = x \vee \dots \vee o_n = x$

Dieser Satz hat die Größe n .

Um auszudrücken, dass es mindestens n Knoten gibt, kann man auch sagen, dass es mindestens n verschiedene Knoten gibt. Dies macht man, indem man über n Knoten aussagt, dass diese paarweise verschieden sind.

Formel 1.5 :

$$\exists u_1, u_2, \dots, u_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg u_i = u_j$$

Die Größe dieses Satzes ist $\binom{n}{2}$

Theorem 1.6 :

Sei φ ein Satz mit der Eigenschaft, dass jeder endliche Graph G , der Modell von φ ist, mindestens n Knoten hat, so gilt für jeden Graphen G :

$$G \models \forall o_1, o_2, \dots, o_n [(\forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x) \wedge \varphi \Rightarrow \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg o_i = o_j]$$

Insbesondere sind mit der gerade erwähnten Eigenschaft von φ folgende Formeln logisch äquivalent:

$$(\exists o_1, o_2, \dots, o_n \forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x) \wedge \varphi,$$

$$(\exists o_1, o_2, \dots, o_n \forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x) \wedge \varphi \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg o_i = o_j$$

1.3 KANONISCHER SATZ FÜR EINEN GRAPHEN

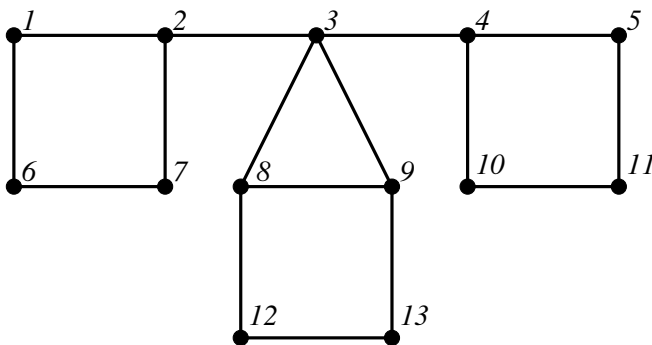
Aufgrund der Voraussetzungen muss die Formel $(\exists o_1, o_2, \dots, o_n \forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x) \wedge \varphi$ von einem Modell wahr gemacht werden, das exakt n Knoten haben. Würde nun für $i \neq j$ gelten: $o_i = o_j$, könnte man eine Belegung für x finden, die verschieden zur Belegung aller o 's ist. Dadurch würde die Aussage falsch. Also muss für alle $i \neq j$ gelten: $\neg o_i = o_j$.

Durch die Anzahlaussage wird ein Graph mit n Knoten natürlich nicht charakterisiert. Dazu muss man die Kanten und Nicht-Kanten kennzeichnen. Dies macht man, indem man alle Knotenpaare durchgeht. Man kann sowohl die o 's als auch die u 's der vorstehenden Sätze hierfür verwenden. Als Beispiel werden die o 's verwendet. Wenn nun von dem Knoten o_i zum Knoten o_j eine Kante geht, schreibt man $R(o_i, o_j)$, und wenn dort keine Kante ist, schreibt man $\neg R(o_i, o_j)$. Diese Formeln verknüpft man mit einem logischen "und" (\wedge). Hierfür benötigt man n^2 atomare Formeln.

Setzt man die vorstehenden Formeln zusammen und verknüpft diese mit einem logischen "und", so bekommt man einen Satz, der den Graphen mit der Grösse $\binom{n}{2} + n + n^2 = O(n^2)$ charakterisiert. Dies ist nun der kanonische Satz für einen Graphen. Zusammengefasst ist der kanonische Satz für einen Graphen mit n Knoten nun:

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n [\forall y \bigvee_{1 \leq i \leq n} x_i = y \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j \wedge \text{alle relationale Aussagen über die } x_1, \dots, x_n]$$

Beispiel 1.7 :



Die kanonische Beschreibung für dieses Beispiel hat die Grösse: 260 (=78 + 13 + 169)
 Man kann diesen Graphen allerdings deutlich kürzer darstellen. Es folgt ein charakterisierender Satz mit einer Länge von 42.

Formel 1.8 :(1): $((\forall x \neg R(x, x)) \wedge (\forall x, y R(x, y) \rightarrow R(y, x))) \wedge$ (2): $\exists a, b, c, d, e, f, g \neg b = c \wedge [$ (3): $\forall x (x = b \vee x = c) \rightarrow$ (4): $[\neg x = d \wedge R(x, a) \wedge (\exists u, v, w R(x, u) \wedge R(u, v) \wedge R(v, w) \wedge R(w, x) \wedge$ (5): $\neg R(u, a) \wedge \neg R(v, a) \wedge \neg R(w, a) \wedge \neg u = w \wedge \neg x = v \wedge$ (6): $\forall y (\neg y = u \wedge \neg y = a \wedge \neg y = w) \rightarrow \neg R(y, x))] \wedge$ (7): $R(a, d) \wedge R(a, e) \wedge R(d, e) \wedge R(d, f) \wedge R(f, g) \wedge R(g, e) \wedge \neg R(f, a) \wedge \neg R(g, a) \wedge$ (8): $[\forall x (\neg x = a \wedge \neg R(x, a)) \rightarrow \exists y, z \forall w [(\neg w = y \wedge \neg w = z) \rightarrow \neg R(w, x)]] \wedge$ (9): $(\forall x R(x, f) \vee R(x, g) \vee R(x, b) \vee R(x, c) \vee (\exists y (R(b, y) \vee R(c, y)) \wedge R(x, y) \wedge \neg y = a))$

Erläuterung zu dieser Formel:

Im folgenden wird das *Beispiel 1.7* als H bezeichnet, und die *Formel 1.8* als φ .

Nun wird heuristisch gezeigt, dass jeder Graph G , den man aus der Tatsache $G \models \varphi$ extrahieren kann, zu dem gegebenen Graphen H isomorph ist. Schaut man sich diese Erläuterung nochmals unter dem Gesichtspunkt an, ob H ein Modell von φ ist, erkennt man auch dies. Die zweite Erläuterung wird nicht ausgeführt, da sie größtenteils fast denselben Wortlaut hätte.

In Zeile 1 wird gesagt, dass kein Knoten eine Selbstkante hat, und dass der Graph ungerichtete Kanten hat.

In der nächsten Zeile werden die Knoten a bis g gebunden, wobei a der Knoten 3 sein soll, b und c sollen 2 und 4 sein, wobei nicht gesagt werden muss, welche Variable nun durch welchen der beiden Knoten interpretiert werden soll, da der Graph achsensymmetrisch ist. Es ist nur wichtig, dass b und c nicht denselben Knoten beschreiben, was am Ende von Zeile 2 gesagt wird. d und e sollen die Knoten 8 und 9 sein, und f und g sollen 12 und 13 sein. Auch hier ist es nicht wichtig, welche Variable welchen der beiden Knoten beschreibt. Weshalb diese Variablen nur durch die genannten Knoten interpretiert werden können, wird im weiteren Verlauf klar.

Die 8. Zeile besagt, dass alle Knoten, die nicht gleich a oder mit a verbunden sind, höchstens den Grad zwei haben. (Wie man sieht, haben alle diese Knoten sogar genau den Grad zwei.) Da die Knoten 2 und 4 und ihre zugehörigen Vierecke symmetrisch zum Punkt 3 sind, behandelt man diese beiden Teilgraphen gemeinsam. Daher wird in Zeile 3 das x mit dem Allquantor gebunden und im Folgenden eine Aussage über das x gemacht, wenn es gleich b oder c ist.

Die Aussage am Anfang von Zeile 4, dass $\neg x = d$ bzw. $\neg b = d$ und $\neg c = d$ ist, wird erst später relevant. Die Zeilen 4 und 5 beschreiben nun die beiden Vierecke, von denen b und c jeweils einer der Knoten ist. Auch ergibt sich, dass b und c mit a verbunden sind. Aber keiner der drei anderen Eckpunkte hat eine Kante zu a . Ausserdem wird noch sichergestellt, dass es wirklich Vierecke sind. Da in Zeile 1 alle Selbstkanten verboten wurden, bedeutet eine Relation zwischen zwei Variablen gleichzeitig, dass diese unterschiedlich sein müssen. Somit müssen x, u, v, w paarweise verschieden sein. Diese beiden Vierecke können keine gemeinsamen Knoten haben, da sonst die Aussage von Zeile 8 oder die Aussage, dass die jeweils drei äußeren Knoten nicht mit a verbunden sind, verletzt wäre.

Dass b und c keine weiteren Kanten haben, wird in Zeile 6 beschrieben. Somit weiß man nun, dass die Knoten 1,2,4,5,6,7,10 und 11 mit keinen weiteren Knoten verbunden sein können.

In Zeile 7 wird das untere Viereck beschrieben. Zunächst kann d keiner der bisher behandelten Knoten sein, da in Zeile 4 steht, dass diese Variable von b und c verschieden ist. Ferner ist d mit a verbunden, so dass d auch keiner der jeweils drei äußeren Eckpunkte sein kann, da diese alle nicht mit a verbunden sind. d kann aber auch nicht gleich a sein, da der Graph keine Selbstkanten besitzt. Genauso kann e nicht als einer der bisher behandelten Knoten interpretiert werden, da e mit a verbunden ist. Auch kann e nicht als b oder c interpretiert werden, da e und d durch eine Kante verbunden sind und b und c keine weitere Kante haben dürfen. Wegen der Kante zwischen d und e müssen d und e verschieden sein.

f und g können auch nicht als einer der Knoten der beiden oberen Vierecke interpretiert werden, da f und g mit d bzw. e verbunden sind und somit zu den Knoten der beiden oberen Vierecke eine weitere Kante hinzukäme. Auch können f und g nicht gleich a sein, da sonst der jeweils andere Knoten mit a verbunden wäre, was in Zeile 7 verboten wird. Auch können f und g nicht d oder e sein, da d und e mit a verbunden sind. Ansonsten wird in Zeile 7 nur das untere Viereck beschrieben. Nun können auch f und g keine weiteren Kanten haben.

In der letzten Zeile wird gesagt, dass es keine weiteren Knoten gibt. Jeder Knoten muss eine Kante zu einem der Knoten f, g, b, c haben oder zu einem Knoten, der mit b oder c verbunden und verschieden von a ist. Die Knoten, die mit b oder c verbunden und verschieden von a sind, sind 1,7,5 und 10. Von den acht Knoten f, g, b, c (bzw. 12, 13, 2, 4) und 1, 7, 5, 10 wissen wir, dass sie keine weiteren Kanten haben können.

Die einzigen drei Knoten, die noch eine Kante zu weiteren Knoten haben dürften, sind 3,8 und 9. Diese können aber keine weiteren Kanten haben, da sie miteinander verbunden sind und die anderen bisher betrachteten Knoten keine weiteren Kanten haben können. Einen weiteren Knoten kann es auch nicht geben; er könnte nämlich nicht mit 12, 13, 2, 4, 1, 7, 5, 10 verbunden sein (Zeile 9), weil diese Knoten keine weiteren Kanten haben können.

Kurz zusammengefasst wurde an einem Punkt (Knoten 3 bzw. Variable a) begonnen, und dann anhand der Eigenschaften, die der Satz beschreibt, gezeigt, dass es zusätzliche Knoten geben muss, und diese untereinander eine spezielle Relation haben müssen, und man so auf den *Beispielgraphen 1.7* kommen muss. Dabei wurde auch ausgeschlossen, dass auch ein nicht isomorpher Graph die *Formel 1.8* wahr machen kann.

Damit ist gezeigt, dass die *Formel 1.8* ein charakterisierender Satz für das *Beispiel 1.7* ist.

Streng genommen müsste man für einen exakten Beweis, dass die *Formel 1.8* ein charakterisierender Satz ist, die Äquivalenz der *Formel 1.8* zum kanonischen Satz für den *Beispielgraphen 1.7* zeigen. Dies geht am besten im dem Sequenzenkalkül. Darauf soll hier allerdings verzichtet werden, da dies ein immenser Aufwand wäre und einen riesigen Umfang hätte.

Wenn man nun den kanonischen Satz von der Länge 260 mit dem logisch äquivalenten Satz mit der Länge 42 vergleicht, leuchtet es ein, dass die kanonische Beschreibung zwar eine obere Schranke liefert, diese aber bei weitem noch kein gutes Ergebnis ist. Daher wird im nächsten Kapitel ein anderes Verfahren angegeben, mit dem man einen Graphen kürzer beschreiben kann, als mit der kanonischen Formel.

2 Verkürzter kanonischer Satz

Wie gesehen, weicht der kanonische Satz noch weit von der deskriptiven Komplexität ab. Daher wird im ersten Unterkapitel ein verkürzter kanonischer Satz beschrieben, von dem ein Teil im zweiten Unterkapitel formal bewiesen wird.

2.1 Beschreibung des verkürzten kanonischen Satzes

Die Aussage, dass der Graph mindestens n Knoten hat, kann man anstatt mit $\binom{n}{2}$ auch mit nur n atomaren Formeln darstellen. Die Formel dazu ist:

Formel 2.1 :

$$\forall u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \exists x \bigwedge_{1 \leq i \leq (n-1)} \neg x = u_i$$

Die Äquivalenz der langen *Formel 1.5* und der verkürzten *Formel 2.1* sieht man nicht sofort. Daher muss man dies in einem formalen Beweis zeigen. Dies macht man z.B. mit dem Gentzenkalkül. Mit diesem wird im nächsten Unterkapitel die Äquivalenz der beiden Formeln gezeigt. Zunächst folgt lediglich eine intuitive Begründung.

Bei jedem Graphen mit n oder mehr Knoten wird dieser Satz wahr, da es für jede Belegung von u_1 bis u_{n-1} einen weiteren Knoten gibt, der von allen u 's verschieden ist; denn u_1 bis u_{n-1} können höchstens $n - 1$ verschiedene Knoten zugeordnet werden, so dass immer ein Knoten frei bleibt. Aber bei $n - 1$ oder weniger Knoten gibt es immer Belegungen für alle u 's, so dass kein x existiert, das von allen verschieden ist. Eine solche Belegung kann man rekursiv definieren, indem man beim Rekursionsschritt $i - 1 \rightarrow i$ die Variable u_i mit einem Knoten belegt, der von den Knoten der Variablen u_1 bis u_{i-1} verschieden ist. Damit ist klar, dass ein Graph, der ein Modell obiger Formel ist, mindestens n Knoten haben muss. Die Größe dieses Satzes ist $n - 1$. Verwendet man zur Beschreibung der Kanten die gleiche Methode wie bei dem normalen kanonischen Satz, so hat der gesamte Satz die Größe $n^2 + 2n - 1$.

Mit dieser Methode kann man einen Satz erzeugen, der den Graphen von *Beispiel 1.7* beschreibt und eine Größe von 194 statt 260 hat.

Will man über m Variablen aussagen, dass diese paarweise unterschiedlich zu interpretieren sind, so benötigt man dazu normalerweise $\binom{m}{2}$ atomare Formeln. Hat die Formel φ aber die Eigenschaft, dass jeder Graph, der Modell von dieser Formel ist, genau n Knoten hat, so kann das *Theorem 1.6* verwendet werden. Soll die Formel über genau n Variablen aussagen, dass diese paarweise unterschiedlich zu interpretieren sind, kann man folgende Formel verwenden. Dabei sind o_1, \dots, o_n die Variablen, die paarweise unterschiedlich interpretiert werden sollen:

2.1 BESCHREIBUNG DES VERKÜRZTEN KANONISCHEN SATZES

$$\varphi \wedge (\forall x \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = x)$$

Anzumerken ist hierbei, wenn φ ein Modell wahr machen würde, das mehr als n Knoten hat, so wird dieses Modell mit vorstehender Formel nicht mehr wahr gemacht. Wenn man nun über $m \leq n$ Variablen sagen will, dass diese unterschiedlich sind, aber $\binom{m}{2} \geq n$, kann man dennoch über n Variablen aussagen, dass diese unterschiedlich interpretiert werden sollen. Dafür kann man sich $m - n$ Variablen binden. Somit benötigt man wieder nur n atomare Formeln um die paarweise Unterschiedlichkeit von m Variablen zu fordern.

Damit benötigt man maximal n atomare Formeln, um paarweise Verschiedenheit bei Variablen zu fordern, wenn die Formel die Eigenschaft hat, dass jeder Graph, der Modell von dieser Formel ist, genau n Knoten hat.

Es wird nun eine Formel angegeben, die den Eingangsgrad (ankommende Kanten in einem Knoten) von allen Knoten in einer Größe $O(n)$ beschreibt. Hierbei bezeichnet $EGr(a)$ die Anzahl der Knoten b mit $R(b, a)$. Die Erklärung der Formel folgt im Anschluss.

Formel 2.2 :

$$\begin{aligned} & \forall u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \exists y_1 \bigwedge_{1 \leq i \leq (n-1)} \neg y_1 = u_i \wedge \\ & \exists o_1, o_2, \dots, o_n [(\forall y_2 \bigvee_{1 \leq i \leq n} o_i = y_2) \wedge \\ & \forall x \exists a_1, a_2, \dots, a_n (\forall z \bigvee_{1 \leq i \leq n} a_i = z) \wedge \\ & \forall v_2, v_3, \dots, v_n ((v_2 = a_1 \vee v_2 = a_2) \wedge (v_3 = v_2 \vee v_3 = a_3) \wedge (v_4 = v_3 \vee v_4 = a_4) \dots \\ & (v_n = v_{n-1} \vee v_n = a_n)) \Rightarrow \\ & \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ EGr(o_j)=0}} (x = o_j \wedge \neg \exists z R(x, z)) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ EGr(o_j)=1}} (x = o_j \wedge R(x, a_1)) \vee \\ & \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ EGr(o_j)>1}} (x = o_j \wedge R(v_{EGr(o_j)}, x)) \wedge \\ & \forall w_2, w_3, \dots, w_n ((w_2 = a_n \vee w_2 = a_{n-1}) \wedge (w_3 = w_2 \vee w_3 = a_{n-2}) \wedge \\ & (w_4 = w_3 \vee w_4 = a_{n-3}) \dots (w_{n-1} = w_{n-2} \vee w_{n-1} = a_2)) \Rightarrow \\ & \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ EGr(o_j)=1}} (x = o_j \wedge \neg R(x, a_n)) \vee \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 < EGr(o_j) < n}} (x = o_j \wedge R(v_{EGr(o_j)}, x))] \end{aligned}$$

Anmerkung: Im unteren Teil kann man die Terme für die gilt $EGr(o_j) = 0$ oder auch $EGr(o_j) = n$ weglassen, da für diese beiden Fälle schon im mittleren Teil gesagt wurde, dass der Eingangsgrad 0 bzw. n ist.

Auf den ersten Blick ist es vielleicht verwunderlich, dass $EGr()$ in der Formel steht, aber in einer speziellen Formel wird hier der Wert von diesem $EGr()$ eingesetzt. Bei einem konkreten gegebenen Graphen weiß man natürlich, welchen Eingangsgrad die Knoten haben. Zunächst wird eine untere Schranke mit Hilfe der u 's angegeben, die in dem Rest der For-

mel nicht weiter auftritt.

Die erste Zeile erzwingt die Existenz von mindestens n Knoten, die zweite Zeile die Existenz von höchstens n Knoten. Die Interpretation der o 's sind die Knoten, für die man die Aussage über den Eingangsgrad treffen will. Diese werden später auch verwendet, um die Kanten explizit zu setzen. Wegen *Theorem 1.6* ergeben die o 's paarweise verschiedene Knoten. Die Verwendung der Variable x und der Variablen a_1, \dots, a_n dient dazu, Kantenbildungen der o_1, \dots, o_n zu jeweils unterschiedlichen Knoten zu ermöglichen, weil für jede Belegung von x die a 's unterschiedliche Belegungen haben können. Wegen *Theorem 1.6* sind die a 's paarweise verschieden zu belegen. Diese beschreiben die Knoten, von denen eine Kante zu einem der o 's geht, und diejenigen von denen keine Kante zu einem der o 's geht. Die v_j können jeweils den Wert von a_1 bis a_j annehmen, um die Bedingung vor der Schlussfolgerung wahr zu machen, also den Wert von genau j verschiedenen Knoten. Hinter dem Folgepfeil wird geschaut, welchen Wert das x hat, und welchen Wert die Funktion $EGr(x)$ hat. Dann werden dem x (bzw. o_j) mindestens die Anzahl von Knoten zugewiesen, die eine Kante zu ihm haben. Ist der Eingangsgrad 0, so wird mit $\neg\exists zR(x, z)$ ausgedrückt, dass keine Knoten auf das x (bzw. o_j) zeigen. Ergibt $EGr(x)$ allerdings 1, so wird mit $R(x, a_1)$ von einem Knoten gesagt, dass dieser auf ihn zeigt. Und zeigt mehr als ein Knoten auf ihn, wird es erreicht durch $R(v_{EGr(o_k)}, x)$, da dieses $v_{EGr(o_k)}$ genau $EGr(o_k)$ verschiedene Werte annehmen kann. Hierbei wird aber nicht verhindert, dass mehr als $EGr(x)$ gerichtete Kanten auf x zeigen können.

Der letzte Teil des Satzes sagt, dass die anderen Knoten keine Kante zu dem jeweiligen o_j haben. Zu erwähnen ist hier, dass man bei der Formulierung der Bedingungen an die w 's bei a_n anfängt, den w 's den Wert zuzuweisen; sonst würde man von ein und demselben a_i sagen, dass es eine Kante nach o_j hat und keine Kante nach o_j . So sagt man genau von den a_1 bis a_i , dass sie Kanten zu o_j haben, und von den a_n bis a_{i+1} , dass sie keine Kante nach o_j haben. Außerdem braucht man bei $n - EGr(o_j) = 0$ und $n - EGr(o_j) = n$ keine Aussage mehr zu machen, da man schon zuvor gesagt hat, dass keine bzw. alle Knoten eine Kante nach o_j haben.

Die Größe dieses Satzes ist maximal $11n - 7$, wobei man noch einen Teil der Kanten explizit angeben muss. Es kann sein, dass die Größe etwas kleiner wird, da man unter Umständen einzelne Formeln weglassen kann, wie eben beschrieben. Dieser Satz gilt allerdings erst ab $n \geq 3$.

Da man nun von jedem Knoten den genauen Eingangsgrad kennt, braucht man für jeden Knoten o_j nur noch entweder alle Kanten mit Zielknoten o_j (d.h. Knoten o mit $R(o, o_j)$) oder alle Nicht-Kanten (d.h. alle Knoten o mit $\neg R(o, o_j)$) aufzulisten, womit sich die Anzahl der benötigten atomaren Formeln von n^2 auf $\leq \frac{n^2}{2}$ reduziert, da man natürlich stets die kleinere Anzahl wählt. In den meisten Fällen benötigt man natürlich deutlich weniger als $\frac{n^2}{2}$, da man diese Zahl höchstens dann erreicht, wenn in jeden Knoten genau $\frac{n}{2}$ Kanten gehen. Damit hat man für den gesamten Satz eine Größe von $\leq \frac{n^2}{2} + 11n - 7$

Unter Umständen kann es auch besser sein, Aussagen über den Ausgangsgrad zu machen, oder eventuell sogar über Eingangsgrad und Ausgangsgrad; dies kann man aber nicht allgemein festlegen, sondern muss es abhängig vom speziell gegebenen Graphen entscheiden. Des weiteren gibt es natürlich noch die Möglichkeit nur das Minimum (Zeile 1 bis 6)

2.1 BESCHREIBUNG DES VERKÜRZTEN KANONISCHEN SATZES

bzw. das Maximum (Zeile 1 bis 3 und 7 bis 9) des Eingangsgrades oder Ausgangsgrades zu beschreiben. Bei dieser Vorgehensweise ist man dann allerdings gezwungen, für jeden Knoten o_j die Kanten mit Zielknoten o_j bzw. die Nicht-Kanten anzugeben. (Gibt man das Minimum an, muss man die Kanten beschreiben, gibt man das Maximum an, muss man die Nicht-Kanten beschreiben). Auch hier verringert sich die Anzahl der atomaren Formeln, die man benötigt, um die Kanten zu bestimmen, von n^2 auf $\leq \frac{n^2}{2}$, da man anfangs nur schauen muss, ob es weniger Kanten oder weniger Nicht-Kanten gibt. Auch wenn diese Methode durchschnittlich schlechter ist als die gezeigte, hat sie eine kleinere Abschätzung nach oben. Diese ist $\leq \frac{n^2}{2} + 7n - 3$

Da man einen Graphen auch mit $n^2 + 2n - 1$ Knoten darstellen kann, ist die neue Methode, wenn man nur das Maximum bzw. das Minimum beschreibt, erst ab 10 Knoten sicher besser. Wenn man den exakten Grad des Knotens beschreibt, ist diese sogar erst ab 18 Knoten mit Sicherheit besser. Damit hat man gezeigt, dass die deskriptive Komplexität eines Graphen mit weniger als 10 Knoten maximal $n^2 + 2n - 1$ und bei mehr als 10 Knoten maximal $\frac{n^2}{2} + 7n - 3$ ist.

Betrachtet man wieder das *Beispiel 1.7*, so liefert die Abschätzung $\frac{n^2}{2} + 7n - 3$ den Wert 172 (=84+91-3). Zählt man dagegen die atomaren Formeln in *Formel 2.2* konkret aus, so ergibt sich als Wert 118. (Man gibt die Oberschranke des Eingangsgrades für jeden Knoten an und die Ober und Unterschranke der Anzahl der Knoten und erhält 88 atomare Formeln; außerdem beschreibt man für jeden Knoten den Nachbarn, wodurch sich 30 atomare Formeln ergeben.) Beachtet man noch, dass der Graph ungerichtete Kanten hat, lässt sich die Größe weiter verringern. Dies erreicht man mit der zusätzlichen Formel $\forall x, y R(x, y) \rightarrow R(y, x)$, so muss man nämlich jede Kante nur einmal beschreiben. Damit kommt man auf 105 atomare Formeln. Außerdem kann man die Formel für den maximalen Eingangsgrad auch noch etwas verkürzen, da der maximale Eingangsgrad dieses Graphen vier ist. Daher benötigt man nur vier paarweise verschiedene a 's, so dass man lediglich sechs atomare Formeln braucht statt 13 für 13 unterschiedliche a 's. Genauso benötigt man nur v_2 bis v_4 , wodurch 18 weitere Atomformeln wegfallen, um v_5 bis v_{13} zu "belegen". Hiermit kommt man schon auf einen Satz der Größe 80. Schließlich kann man die Knoten mit denselben Eingangsgraden zusammenfassen um über sie zu sagen, dass sie diesen Eingangsgrad haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien o_1 - o_4 die Knoten mit dem Eingangsgrad drei; dann kann man statt

$$(x = o_1 \wedge R(v_3, x)) \vee (x = o_2 \wedge R(v_3, x)) \vee (x = o_3 \wedge R(v_3, x)) \vee (x = o_4 \wedge R(v_3, x))$$

auch schreiben:

$$(x = o_1 \vee x = o_2 \vee x = o_3 \vee x = o_4) \wedge R(v_3, x).$$

Damit spart man, wenn es m Knoten mit gleichem Grad gibt, $m - 1$ atomare Formeln. Somit kommt man auf einen Satz der Größe 70, da es acht Knoten mit Grad zwei und vier Knoten mit Grad drei gibt.

Somit haben wir das *Beispiel 1.7* von 260 atomaren Formeln mit dem kanonischen Satz auf einen Satz der Größe 70 gebracht, und zwar durch die verbesserte kanonische Formel und kleine Tricks. Dieser Satz ist zwar auch noch deutlich länger als die unmethodisch

gefundene *Formel 1.8* mit 42 atomaren Formeln, aber im Vergleich zu der normalen kanonischen Beschreibung doch eine deutliche Verbesserung.

2.2 Beweis der Äquivalenz zweier Sätze

Es wird nun im klassischen Sequenzenkalkül die Äquivalenz der *Formel 1.5* und der *Formel 2.1* bewiesen.

Eine Sequenz sieht folgendermaßen aus:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_m \quad n, m \geq 0$$

Der Sequenzenpfeil bedeutet ähnlich wie der logische Folgebildungspfeil "wenn-dann". Die linke Seite dieses Sequenzenpfeils nennt man Antezedent und die rechte Seite Sukzedent. So kann man beim Antezedent die Kommas durch \wedge und beim Sukzedent die Kommas durch \vee ersetzen.

Es werden zwei Fälle unterschieden. Man spricht von klassischem Sequenzenkalkül, wenn das Sukzedent aus beliebig vielen Formeln bestehen kann. Wenn das Sukzedent aus höchstens einer Formel bestehen darf, nennt man den entsprechenden Kalkül intuitionistisch.

Kann man im klassischen (intuitionistischen) Sequenzenkalkül für zwei Formeln φ und ψ die Sequenz $\varphi \Rightarrow \psi$ und auch die Umkehrung $\psi \Rightarrow \varphi$ herleiten, so sind diese klassisch (intuitionistisch) äquivalent. Außer den logischen Axiomen ($\varphi \Rightarrow \varphi$) und Schlußregeln (einschließlich Schnitt) haben wir noch die Sequenzen für die Gleichheit:

$$1. \Rightarrow a = a$$

$$2. a = b, F(a) \Rightarrow F(b)$$

Aus diesen beiden Sequenzen folgen z.B. Symmetrie und Transitivität und überhaupt alle üblichen Eigenschaften der Gleichheitsrelation.

Wird etwas im klassischen Sequenzenkalkül mit der Gleichheit gezeigt, so wird dies abgekürzt mit $K(=)$, und wird dies im intuitionistischen Kalkül mit der Gleichheit gezeigt, wird dies mit $I(=)$ abgekürzt.

Näheres zu den Regeln des Sequenzenkalküls siehe etwa [2].

Um die Korrektheit der *Formel 2.1* zu beweisen, wird deren Äquivalenz zu der *Formel 1.5* gezeigt. Also wird die Äquivalenz folgender Formeln gezeigt:

$$\varphi \hat{=} \exists u_1, u_2, \dots, u_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg u_i = u_j$$

$$\psi \hat{=} \forall u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \exists x \bigwedge_{1 \leq i \leq (n-1)} \neg x = u_i$$

Die Sequenz $\varphi \Rightarrow \psi$ wird im Folgenden als Schrumpfssequenz bezeichnet. Es wird nun bewiesen, dass die Schrumpfssequenz und deren Rückrichtung klassisch gelten. Die Schrumpfssequenz ist allerdings nicht intuitionistisch gültig, die Rückrichtung dagegen schon. Daher sind diese Aussagen nur klassisch jedoch nicht intuitionistisch äquivalent.

2.2 BEWEIS DER ÄQUIVALENZ ZWEIER SÄTZE

Es wird zunächst die Schrumpfssequenz bewiesen, wobei zuerst der Fall $n = 2$ betrachtet wird:

Dazu wäre zu zeigen: $\exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2 \Rightarrow \forall x_1 \exists z \neg x_1 = z$

Da jedoch diese Sequenz selber schwer zu beweisen ist, beweist man lieber die folgende zu ihr in $K(=)$ äquivalenten Sequenz:

$\exists x_1 \forall z x_1 = z \Rightarrow \forall x_1, x_2 x_1 = x_2$

Die Äquivalenz zur Schrumpfssequenz sieht man mit folgendem Zwischenschritt:

$\neg \forall x_1 \exists z \neg x_1 = z \Rightarrow \neg \exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2$

Durch intuitionistische Transformationen kann man allerdings nicht auf die Ursprungsform zurückkommen. Daher ist der gesamte Beweis der ursprünglichen Schrumpfssequenz nicht mehr intuitionistisch, auch wenn die transformierte Sequenz intuitionistisch ist.

Aus den Gleichheitsaxiomen folgt:

$a_1 = a, a_1 = b \Rightarrow a = b$

Im Folgenden werden die Eigenvariablenbedingungen stets erfüllt.

$\forall z a_1 = z, \forall z a_1 = z \Rightarrow a = b$ ($\forall \Rightarrow$)

$\forall z a_1 = z \Rightarrow a = b$ (Kontraktion \Rightarrow)

$\forall z a_1 = z \Rightarrow \forall x_1, x_2 x_1 = x_2$ ($\Rightarrow \forall$)

$\exists x_1 \forall z x_1 = z \Rightarrow \forall x_1, x_2 x_1 = x_2$ ($\exists \Rightarrow$)

Statt für allgemeines n wird nur noch paradigmatisch der Fall $n = 3$ gezeigt:

Wieder wird statt

$\exists x_1, x_2, x_3 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3) \Rightarrow \forall x_1, x_2 \exists z (\neg x_1 = z \wedge \neg x_2 = z)$

die folgende in $K(=)$ äquivalente Sequenz bewiesen:

$\exists x_1, x_2 \forall z (x_1 = z \vee x_2 = z) \Rightarrow \forall x_1, x_2, x_3 (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)$

Zunächst beweist man die Sequenz:

$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c \Rightarrow a = b \vee a = c \vee b = c$

Dazu verwendet man folgende Gleichheitsaxiome:

(1) $a_1 = a, a_1 = b \Rightarrow a = b$

(4) $a_2 = a, a_2 = b \Rightarrow a = b$

(2) $a_1 = b, a_1 = c \Rightarrow b = c$

(5) $a_2 = b, a_2 = c \Rightarrow b = c$

(3) $a_1 = a, a_1 = c \Rightarrow a = c$

(6) $a_2 = a, a_2 = c \Rightarrow a = c$

Bei der Referenz auf frühere Sequenzen wird die unmittelbar vorhergehende mit "vor" bezeichnet. Ausserdem werden auch hier die Eigenvariablenbedingungen stets erfüllt.

$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b, a_2 = b \Rightarrow a = b$	aus (1),(4)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_2 = c, a_2 = b \Rightarrow a = b, b = c$	aus vor,(5)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = a, a_2 = b \Rightarrow a = b, b = c, c = a$	aus vor,(3)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = a \vee a_2 = a, a_2 = b, a_2 = b \Rightarrow a = b, b = c, c = a, a = b$	aus vor,(4)
$(*) a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_2 = b \Rightarrow a = b, b = c, a = c$	(Kontraktion)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b, a_2 = b \Rightarrow a = b$	aus (1),(4)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c, a_1 = b \Rightarrow a = b, b = c$	aus vor,(2)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_2 = a, a_1 = b \Rightarrow a = b, b = c, c = a$	aus vor,(6)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b, a_1 = b \Rightarrow a = b, b = c, c = a, a = b$	aus vor,(1)
$(**) a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = b \Rightarrow a = b, b = c, a = c$	(Kontraktion)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c, a_1 = b \vee a_2 = b, \Rightarrow a = b, b = c, a = c, a = b, b = c, a = c$	aus (*),(**)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c \Rightarrow a = b, b = c, a = c$	(Kontraktion)
$a_1 = a \vee a_2 = a, a_1 = b \vee a_2 = b, a_1 = c \vee a_2 = c \Rightarrow a = b \vee b = c \vee a = c$	$\Rightarrow \vee$
$\forall z a_1 = z \vee a_2 = z, \forall z a_1 = z \vee a_2 = z, \forall z a_1 = z \vee a_2 = z \Rightarrow a = b \vee b = c \vee a = c$	$\forall \Rightarrow$
$\forall z a_1 = z \vee a_2 = z \Rightarrow a = b \vee b = c \vee a = c$	(Kontr \Rightarrow)
$\forall z a_1 = z \vee a_2 = z \Rightarrow \forall x_1, x_2, x_3 x_1 = x_2 \vee x_2 = x_3 \vee x_1 = x_3$	$\Rightarrow \forall$
$\exists x_1, x_2 \forall z x_1 = z \vee x_2 = z \Rightarrow \forall x_1, x_2, x_3 x_1 = x_2 \vee x_2 = x_3 \vee x_1 = x_3$	$\exists \Rightarrow$

Für grössere n funktioniert der entsprechende Beweis ähnlich. Der Beweis für beliebig gelassenes n wäre allerdings etwas zu umfangreich für diese Arbeit, weshalb an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

Nun wird die Umkehrung der ursprünglichen Schrumpfssequenz gezeigt, also dass aus der verkürzten *Formel 2.1* die längeren kanonischen *Formel 1.5* folgt:

Auch hier wird mit $n = 2$ begonnen. Zu zeigen ist hier:

$$\forall x_1 \exists y \neg x_1 = y \Rightarrow \exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2$$

2.2 BEWEIS DER ÄQUIVALENZ ZWEIER SÄTZE

Aus dem Gleichheitsaxiom folgt:

$$\begin{aligned} \neg a_1 = a_2 &\Rightarrow \neg a_1 = a_2 && (\Rightarrow \exists) \\ \neg a_1 = a_2 &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2 && (\exists \Rightarrow) \\ \exists y \neg a_1 = y &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2 && (\exists \Rightarrow) \\ \forall x_1 \exists y \neg x_1 = y &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \neg x_1 = x_2 && (\forall \Rightarrow) \end{aligned}$$

Auch hier wird wieder nur paradigmatisch der Fall $n = 3$ anstatt allgemeine n gezeigt:

Zu zeigen ist hier:

$$\forall x_1, x_2 \exists y (\neg x_1 = y \wedge x_2 = y) \Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge \neg x_1 = x_3)$$

Hierzu benötigt man folgende Gleichheitsaxiome:

- (1) $\neg a_1 = a_2 \Rightarrow \neg a_1 = a_2$
- (2) $\neg a_2 = a_3 \Rightarrow \neg a_2 = a_3$
- (3) $\neg a_1 = a_3 \Rightarrow \neg a_1 = a_3$

$$\begin{aligned} \neg a_1 = a_2, \neg a_2 = a_3 &\Rightarrow \neg a_1 = a_2 \wedge \neg a_2 = a_3 && \text{aus (1),(2)} \\ \neg a_1 = a_2, \neg a_2 = a_3, \neg a_1 = a_3 &\Rightarrow \neg a_1 = a_2 \wedge \neg a_2 = a_3 \wedge \neg a_1 = a_3 && \text{aus vor,(3)} \\ \neg a_1 = a_2, \neg a_2 = a_3, \neg a_1 = a_3 &\Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge && (\Rightarrow \exists) \\ \neg x_1 = x_3 &&& \end{aligned}$$

Da auf der rechten Seite des Sequenzenpfeil schon die gewünschte Formel steht, wird zur besseren Lesbarkeit $\varphi \hat{=} \exists x_1, x_2, x_3 \neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge \neg x_1 = x_3$ gesetzt.

$$\begin{aligned} \neg a_1 = a_2, \neg a_2 = a_3, \neg a_1 = a_3 &\Rightarrow \varphi \\ \neg a_1 = a_3 \wedge \neg a_2 = a_3, \neg a_1 = a_2 &\Rightarrow \varphi \\ \exists y \neg a_1 = y \neg a_1 = y \wedge \neg a_2 = y, \neg a_1 = a_2 &\Rightarrow \varphi && (\exists \Rightarrow) \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \neg a_1 = a_2 &\Rightarrow \varphi && (\forall \Rightarrow) \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \neg a_1 = a_2, \neg a_3 = a_2 &\Rightarrow \varphi \wedge \neg a_3 = a_2 && \text{aus vor,(2)} \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \neg a_1 = a_2, \neg a_3 = a_2 &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \varphi \wedge \neg x_1 = x_2 && (\Rightarrow \exists) \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \neg a_1 = a_2, \neg a_3 = a_2 &\Rightarrow \varphi && \Rightarrow (\text{Kontr}) \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \neg a_1 = a_2 \wedge \neg a_3 = a_2 &\Rightarrow \varphi \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \exists y \neg a_1 = y \wedge \neg a_3 = y &\Rightarrow \varphi && \exists \Rightarrow \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y, \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y &\Rightarrow \varphi && \forall \Rightarrow \\ \forall x_1, x_2 \exists y \neg x_1 = y \wedge \neg x_2 = y &\Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_2 = x_3 && (\text{Kontraktion}) \\ \wedge \neg x_1 = x_3 &&& \end{aligned}$$

Genau wie bei der Schrumpfsequenz wird auf einen allgemeinen Beweis verzichtet, da das Prinzip für allgemeine n genauso funktioniert.

Außerdem ist noch anzumerken, dass der Beweis für die Umkehrung intuitionistisch ist. Dies gilt natürlich auch für allgemeine n . Die Richtung von der *Formel 1.5* zur *Formel 2.1* geht nicht intuitionistisch, was von Degen im Aufsatz [1] bewiesen wird. Gleichzeitig sei hier ein Dank an Herrn Degen ausgesprochen, der bei der Auffindung dieses Beweises entscheidend geholfen hat.

3 Betrachtung unterschiedlicher Modellklassen

3.1 Feste Anzahl verbindungsloser Knoten

Die Frage nach der kürzesten Beschreibung der Graphen ohne Kanten kann man in folgende drei Aussagen aufteilen:

- Es gibt keine Relation zwischen den Knoten.
- Es gibt höchstens n Knoten.
- Es gibt mindestens n Knoten.

Die Eigenschaft, dass es keine Relationen zwischen den Knoten gibt, wird mit $\forall a, b \neg R(a, b)$ ausdrücken. Da man aus keiner Aussage auch keine Information ziehen kann, geht dies auch nicht kürzer.

Die Eigenschaften, dass es höchstens n Knoten bzw. dass es mindestens n Knoten gibt, wurde schon beim kanonischen Satz bzw. beim verkürzten kanonischen Satz behandelt. Die *Formel 1.4* zeigt die Eigenschaft für höchstens n Knoten in n atomaren Formeln und die *Formel 2.1* zeigt die Eigenschaft für mindestens n Knoten in $n - 1$ atomaren Formeln.

Vermutung 3.1 :

Die Formeln 1.4 und 2.1 kann man einzeln für sich wahrscheinlich nicht verkürzen, da man über n Knoten sagen muss, dass es keinen weiteren gibt, bzw. über $n - 1$ Knoten, dass es einen weiteren gibt.

Vermutung 3.2 :

Wahrscheinlich kann man auch die Konjunktion diese drei Aussagen nicht kürzer darstellen.

Es gibt wahrscheinlich keine direkte Möglichkeit die Anzahlaussage zu treffen ohne explizit die Maximalzahl und Minimalzahl der Knoten anzugeben. Wenn dies so stimmt, ist die deskriptive Komplexität von n verbindungslosen Knoten $2n$ ($= 1 + n + n - 1$). Mit Sicherheit kann man sagen, dass die deskriptive Komplexität $\leq 2n$ ist.

Will man nur sagen, dass es genau n unterschiedliche Dinge gibt, kann man natürlich das Relationssymbol weglassen und bekommt somit für die Formel eine Größe von $2n - 1$.

3.2 Bäume

3.2.1 Beliebige nicht gewurzelte Bäume

Nicht gewurzelte Bäume bilden eine Unterklasse von ungerichteten Graphen. Ein ungerichteter Graph ist irreflexiv und symmetrisch. Ein solcher ungerichteter Graph ist ein Baum,

3.2 BÄUME

wenn er zusammenhängend ist und keinen Zyklus hat. Desweiteren sind folgende Aussagen äquivalent:

- der Graph G ist ein Baum
- der Graph G ist maximal kreisfrei
- der Graph G ist minimal zusammenhängend
- zwischen je zwei Knoten aus G gibt es genau einen Weg

Desweiteren folgt aus der Eigenschaft ein Baum zu sein, dass ein Baum mit n Knoten genau $n - 1$ Kanten besitzt.

Diese Aussagen sind keine FOL-Sätze. Darüber hinaus gibt es überhaupt keinen FOL-Satz, dessen Modelle genau die endlichen Bäume sind. Aber wenn man einen endlichen Graphen in FO charakterisieren will, dann kann man dafür die eben beschriebenen nicht FOL-Eigenschaften heuristisch ausnutzen.

Theorem 3.3 :

Einen beliebigen nicht gewurzelten Baum kann man mit einem Satz der Länge $\leq 5n + 1$ charakterisieren, wobei n die Anzahl der Knoten des Baumes ist.

Zunächst gibt man wieder die exakte Anzahl der Knoten mit $2n - 1$ atomaren Formeln an, und verwendet für die Beschreibung der Kanten wieder die n unterschiedlichen Variablen von dem Satz, der die Obergrenze festlegt. Dass die Variablen unterschiedlich sind, wurde schon im *Theorem 1.6* gezeigt.

Dadurch, dass die Kanten zufällig gewählt werden, kann man keine Rückschlüsse über die Kanten ziehen. Daher muss jede einzelne Kante zwischen den Knoten explizit angegeben werden. Dies ist mit $n + 1$ Relationen darstellbar. Bei einem speziellen Baum ist eventuell die deskriptive Komplexität aufgrund von Regelmäßigkeiten geringer. Zunächst gibt man von jeder Kante eine Richtung als Relation an. Da es exakt $n - 1$ Kanten gibt, braucht man hierfür auch $n - 1$ Relationen. Jetzt kann man die Symmetrie durch folgenden Satz ausdrücken $\forall x, y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.

Die Nicht-Kanten kann man ausdrücken, indem man Zyklen zu einer falschen Aussage führt. Dies ist nur deshalb möglich, weil der Graph endlich ist. Es wird angenommen, dass die Länge des längsten Pfades des Baumes m ist. Es gilt auf jeden Fall: $m < n$.

Da jeder Baum zusammenhängend ist, und die Kanten bidirektional sind, kann zu jeder Länge eines Zyklus, durch Springen zu einem Nachbarknoten und zurück, ein beliebiges Vielfaches von 2 dazu addiert werden. Dies geht nicht bei alleinstehenden Knoten, die aber ausgeschlossen werden können, da schon alle Kanten und die Anzahl der Knoten angegeben sind, und jeder Baum zusammenhängend ist.

Durch die zwei vorhergehenden Überlegungen würde durch eine zusätzliche Kante immer ein Zyklus der Länge m oder $(m + 1)$ entstehen. Dies kann man nun mit folgendem Satz verhindern:

$$\begin{aligned} & \forall x (\\ & \forall a_1, a_2, \dots, a_{m+1} (R(x, a_1) \wedge R(a_1, a_2) \wedge \dots \wedge R(a_{m-1}, a_m) \wedge \\ & R(a_m, a_{m+1}) \wedge (\neg a_2 = x \wedge \neg a_3 = x \dots \wedge \neg a_{m-1} = x)) \\ & \rightarrow ((\neg x = a_m \vee a_1 = a_{m-1}) \wedge (\neg x = a_{m+1} \vee a_1 = a_m))) \end{aligned}$$

Dieser Satz bedeutet: Von jedem Knoten kann man m oder $m + 1$ Schritte gehen, und wenn man nicht über den Anfangsknoten geht, ist der Endknoten und der Anfangsknoten unterschiedlich oder der zweite Knoten und der vorletzte Knoten sind gleich. Dies bedeutet, dass es keinen Zyklus der Länge m oder $m + 1$ gibt.

Außerdem werden auch automatisch die Selbstkanten verboten. Hier muss man zwei Fälle unterscheiden.

Wenn $m \geq 3$, gibt es immer mindestens einen Weg von x weg, der grösser oder gleich 2 ist, da der Graph zusammenhängend ist. Nun nehme ich an, dass m die ungerade Zahl ist, der Beweis funktioniert entsprechend, wenn $m + 1$ die ungerade Zahl ist. Jetzt könnte man bei einer Selbstkante $a_1 = x$ wählen, $x \neq a_2 = a_4 = \dots = a_{m-1} = y$ ($R(x, y)$), $x \neq a_3 = a_5 = \dots a_{m-2} = z$ ($R(y, z)$) und $a_m = x$. Diese Belegung macht die oben genannte Formel auch ohne Zyklus falsch.

Wenn $m = 0$ oder $m = 1$ ist, kann man $a_1 = x$ setzen und wenn $m = 2$ ist, kann man $a_1 = x$, $a_2 = y$ ($R(x, z)$) und $a_3 = x$ setzen.

Auch in diesen Fällen wird der Satz falsch.

Hierdurch ergibt sich insgesamt die Größe für diesen Satz von $3n + 2m + 3$ (bez. $n - 1 + 2 + 2n - 1 + 2m + 3$), wobei $m < n$ gilt. Daher kann man es für den allgemeinen Fall abschätzen nach $\leq 5n + 1$. Man muss nur 1 statt 3 dazu addieren, da m mindestens 1 kleiner als n ist. Dafür muss man \leq statt $<$ schreiben.

Anmerkung: Für Bäume mit $n \leq 7$ kann es kürzer sein, die Nichtkanten einzeln aufzulisten. Da das aber Spezialfälle sind, werde ich darauf nicht näher eingehen.

Betrachtet man nun mehrere nicht gewurzelten Bäume gleichzeitig, kann man eigentlich nur zwei Aussagen treffen:

- Es gibt höchstens $n - 1$ symmetrische Kanten.
- Der Graph hat keine Zyklus.

Man könnte zwar, wenn alle Bäume mindestens einen Pfad der Länge ≥ 3 haben, genau wie eben einen Zyklus der Länge des maximalen Pfades verbieten. Damit verhindert man aber noch nicht, dass die Bäume untereinander verbunden sind, solange dadurch kein neuer längster Pfad entsteht. Verhindern könnte man dies, indem man, wie bei dem erweiterten kanonischen Satz, den maximalen Grad für jeden Knoten vorschreibt. Allerdings geht es noch ein bisschen kürzer.

Zunächst beschreibt man, wie beim einfachen Baum, die genaue Anzahl der Knoten und alle Kanten in eine Richtung und außerdem die Symmetrie des Graphens. Dies geht mit $3n$ atomaren Formeln. Und nun wird ausgedrückt, dass es keine weiteren Kanten mehr geben

3.2 BÄUME

kann. Hierfür nehme ich an, dass jeweils a_i mit b_i verbunden sind, und es m Kanten gibt:

$$\forall x, y \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} ((\neg x = a_i \wedge \neg y = b_i) \wedge (\neg x = b_i \wedge \neg y = a_i)) \right) \Rightarrow \neg R(x, y)$$

Diese Formel sagt aus, wenn x und y nicht eine der Kanten ist, die schon beschrieben wurde, ist dort keine Kante. Dies geht in $4m + 1$ atomaren Formeln. Wenn es t Bäume sind, hat man $n - t$ Kanten. Damit ist die Größe der gesamten Formel: $7n - 4t + 1$.

3.2.2 Beliebige gewurzelte Bäume

Ein gewurzelter Baum hat genau eine Wurzel, d.h. genau einen Knoten mit Eingangsgrad Null. Von dieser Wurzel aus kann man jeden Punkt durch genau einen gerichteten Pfad erreichen.

Damit ist ein gewurzelter Baum irreflexiv und jeder Knoten außer der Wurzel hat genau einen Vorgänger.

Theorem 3.4 :

Einen beliebigen gewurzelten Baum kann man mit einem Satz der Länge $\leq 3n + 1$ charakterisieren, wobei n die Anzahl der Knoten des Baumes ist.

Zunächst benötigt man die exakte Anzahl der Knoten ($2n - 1$ atomare Formeln; n für die obere Schranke und $n - 1$ für die untere Schranke). Zusätzlich $n - 1$ Relationen für die Kanten, allerdings nur in der Richtung vom Vaterknoten zum Kindknoten ($R(\text{Vater}, \text{Kind})$). Hierbei ist zu beachten, dass man zur Darstellung der Kanten n Variablen nehmen muss, die verschiedene Knoten als Wert haben. Daher sollte man die Variablen, die man zum beschreiben der maximalen Knotenzahl benötigt, verwenden. Dass diese unterschiedlich sein müssen wurde im *Theorem 1.6* gezeigt.

Um weitere Kanten zu verhindern muss man hier lediglich sagen, dass die Wurzel keinen Vater und jeder andere Knoten höchstens einen Vater hat. Dies geht mit drei atomaren Formeln:

$$(\forall x \exists y \forall z R(z, x) \rightarrow z = y) \wedge (\exists a \forall b \neg R(b, a))$$

Wobei hier a die Wurzel ist. Jede zusätzliche Kante würde nun diesen Term falsch machen, da entweder die Wurzel einen Vater, oder ein anderer Knoten 2 Väter hätte. Das bedeutet, dass ein beliebiger gewurzelter Baum mit $3n + 1$ atomaren Formeln darstellbar ist.

Man kann anstatt der unteren Schranke es auch anders beschreiben, so dass es nachweislich nicht länger ist, aber nicht sicher kürzer:

Man beschreibt den Graphen wie eben angegeben und lässt die untere Schranke weg. Stattdessen sagt man über jeden Knoten, der mehr als einen Nachfolger hat, aus, dass er mindestens diese Anzahl an Nachfolgern hat. Wenn v der Knoten mit m Nachfolgern ist ($m \geq 3$), über den diese Aussage gemacht werden soll, lautet die Formel folgendermaßen:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \exists x_m \neg x_1 = x_m \wedge \neg x_2 = x_m \wedge \dots \wedge \neg x_{m-1} = x_m \wedge R(v, x_m)$$

hierfür benötigt man m atomare Formeln.

Sollte $m = 2$ sein, sagt man aus, dass die zwei Nachfolger nicht gleich sind ($\neg x_1 = x_2$)

Wenn $m = 1$ ist, braucht man gar nichts weiter aussagen, da die minimale Anzahl von Nachfolgern (nämlich nur einer) schon durch die Beschreibung der Kanten feststeht.

Da man über jeden Knoten die minimale Anzahl der Nachfolger festlegt, wird so auch insgesamt die minimale Anzahl der Knoten festgelegt (Alle Nachfolger + die Wurzel, die kein Nachfolger ist). Es kann auch kein Knoten mehr Nachfolger haben, da die Obergrenze der gesamten Knoten festgelegt ist.

Da es insgesamt genau $n - 1$ Nachfolger gibt und kein Knoten der direkte Nachfolger von zwei Knoten ist, und man höchstens so viele atomare Formeln braucht, wie es Nachfolger gibt, kann dies auch in $n - 1$ dargestellt werden. Allerdings spart man bei jedem Knoten, der einen oder zwei Nachfolger hat, jeweils eine atomare Formel. Nach oben abgeschätzt ist die Grösse der gesamten Formel trotzdem immer noch $3n + 1$. Wenn man nun mehrere (o) gewurzelte Bäume gleichzeitig darstellen will, muss man die Aussage machen, dass es mindestens o Knoten gibt, die keinen Vater haben (da jeder Baum genau eine Wurzel hat, die verschieden zu allen anderen Wurzeln ist). Diese Aussage lässt sich beschreiben mit:

$$\forall k_1, k_2, \dots, k_{o-1} \exists v \neg v = k_1 \wedge \neg v = k_2 \wedge \dots \wedge \neg v = k_{o-1} \wedge \neg \exists w R(w, v)$$

Beweis der Richtigkeit dieser Formel:

Angenommen es gibt nur $o - 1$ oder weniger Knoten mit der Eigenschaft, dass sie keinen Vaterknoten haben. Nun muss die Aussage aber auch stimmen, wenn bei k_1 bis k_{o-1} alle Knoten ohne Vater dabei sind. Da v aber nun verschieden zu allen k_1 bis k_{o-1} ist und auch keinen Vater haben darf, gibt es hier einen Widerspruch.

Es gibt mindestens o Wurzeln, da nun immer mindestens eine Wurzel übrig bleibt, und nicht bei k_1 bis k_{o-1} dabei sein kann. Hierfür braucht man $o - 1$ atomare Formeln.

Die Anzahl der Knoten und die Kanten muss man genauso beschreiben wie bei einzelnen gewurzelten Bäumen. Da hierbei die Obergrenze der gesamten Knoten festgesetzt wird, kann es auch nicht mehr als o Wurzeln geben. Erwähnen muss man nun noch, dass es nun nur $n - o$ Kanten gibt, die man auch in $n - o$ atomaren Formeln beschreiben kann. Die Nichtkanten muss man wieder nicht angeben, da sonst entweder eine Wurzel einen Vater, oder ein andere Knoten 2 Väter hätte. Nun muss man noch auf dieselbe Weise wie bei einem einzelnen Baum sagen, dass jeder Knoten maximal einen Vater hat:

$$\forall x \exists y \forall z R(z, x) \rightarrow z = y$$

Nun kommt man genau wie bei einem einzelnen Baum auf maximal $3n + 1$ (bez. $o + 2n - 1 + n - o + 2$). Das ergibt sich, da man jede atomare Formel, die man durch die geringere Kantenzahl benötigt, für die Anzahl der Wurzeln braucht.

Es gibt noch eine andere Art, gewurzelte Bäume in FOL darzustellen. Dazu verwendet man das Relationssymbol " \leq ", so dass ein Knoten mit jedem seiner Nachfolger und mit sich selbst in Relation steht, auch wenn es nicht der direkte Nachfolger ist. Im Gegensatz zur eben verwendeten Relation kann man nun die Graphklasse des Baumes in FOL folgendermaßen beschreiben, was gleichzeitig die Definition des Baumes ist:

$$\forall x x \leq x \text{ (reflexiv)}$$

$$\forall x, y, z (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z) \text{ (transitiv)}$$

$$\forall x, y (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y) \text{ (antisymmetrisch)}$$

$$\forall x, y, z (x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x) \text{ (die Vorgänger von einem Knoten liegen auf)}$$

3.2 BÄUME

einem Zweig)

$\exists w \forall x w \leq x$ (es gibt eine Wurzel, die wegen der Asymmetrie eindeutig ist)

Dies ist eine übliche Standarddefinition für einen Baum, wie sie in Literaturen verwendet wird.

Zur Charakterisierung des Baumes benötigt man zunächst die exakte Anzahl der Knoten ($2n - 1$ atomare Formeln). Wegen *Theorem 1.6* müssen die Variablen der oberen Schranke alle unterschiedlich interpretiert werden. Diese verwendet man nun, um die Kanten zu beschreiben. Dies geht, indem man für jede Kante mit x direkter Vorgänger von y schreibt: $x \leq y$. Nachdem x und y verschieden sein müssen, braucht man dies nicht mehr explizit zu sagen. Da es bei n Knoten exakt $n - 1$ Kanten gibt, benötigt man hierfür $n - 1$ atomare Formeln. Zusätzliche Kanten würden die Struktur des Baumes kaputt machen, die durch die Definition vorgegeben ist. Somit kommt man auf eine Gesamtgröße von $3n + 10$.

Diesen Satz kann man noch für Bäume verkürzen, die mehr als fünf Knoten haben, die keine Blätter sind, indem man sowohl die normale Kanten-Relation, als auch dieses \leq zulässt. Allerdings wird statt $R(x, y)$ das Symbol $x \prec y$ verwendet, da dies in diesem Zusammenhang üblicherweise verwendet wird. Hierfür wird wieder die Baumbeschreibung benötigt und zusätzlich noch die Verbindung dieser beiden Relationen:

$$\forall x, y x \prec y \Rightarrow (\neg \exists z x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z)$$

Eigentlich müsste auch die Rückrichtung beschrieben werden, allerdings benötige ich sie bei meinem Satz nicht.

Nun kann man jede Kante mit x als direkten Vorgänger von y mit $x \prec y$ beschreiben ($n - 1$ atomare Formeln). Um zu sagen, dass die m Nachfolger vom Knoten v alle unterschiedlich sind, verwendet man ab drei Knoten die Formel:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \exists x_m \neg x_1 = x_m \wedge \neg x_2 = x_m \wedge \dots \wedge \neg x_{m-1} = x_m \wedge R(v, x_m)$$

Bei 2 Knoten geht dies sogar mit nur einer atomaren Formel. Dafür benötigt man nun maximal $n - 1$ atomare Formeln. Damit ist automatisch die Minimalzahl der Knoten beschrieben worden. Um nun einen Graphen der noch zusätzliche Knoten hat, auszuschliessen, reicht es auszusagen, dass jeder Knoten (nicht unbedingt direkter) Vorgänger von einem der Blätter ist. Somit bekommt man für einen Baum mit n Knoten und m Blätter einen Satz der Größe $\leq 2n + m + 15$ ($= 17 + (n - 1) + (n - 1) + m$). Für jeden Baum der mehr als einen Knoten hat (wobei es hierfür eh deutlich kürzer geht), kann man dies grob abschätzen mit $\leq 3n + 14$. Dies sieht zwar größer aus als die $3n + 10$, da Bäume allerdings meistens viele innere Knoten haben, ist diese Methode in der Regel deutlich kürzer.

3.2.3 Volle gewurzelte Bäume

Ein voll gewurzelter Baum ist ein regulär verzweigter und regulär tiefer Baum. Also hat jeder Knoten gleichviele Kinder, außer den Blättern, welche natürlich keine Kinder haben. Außerdem ist der Weg von der Wurzel zu jedem Blatt gleich lang. Dies ist wahrscheinlich die Struktur, die die kleinste atomare Komplexität hat.

Theorem 3.5 :

Einen vollen gewurzelten Baum kann man mit einem Satz der Länge $4 \log_m(n+1) + 2m + 3$ charakterisieren, wobei n die Anzahl der Knoten des Baumes ist und m der Verzweigungsgrad.

Die Anzahl der Knoten wird auch im Folgenden durch n und die Anzahl der Kinder, die jeder Knoten hat, durch m beschrieben. Außerdem ist bei $R(x, y)$ x der Vorgänger von y . Zunächst muss beschrieben werden, dass jeder Knoten kein Kind oder m Kinder hat:

- (1) $\forall x (\forall y \neg R(x, y)) \vee$
- (2) $((\forall y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \exists z \neg y_1 = z \wedge \neg y_2 = z \wedge \dots \wedge \neg y_{m-1} = z \wedge R(x, z)) \wedge$
- (3) $(\exists y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \forall z \neg y_1 = z \wedge \neg y_2 = z \wedge \dots \wedge \neg y_{m-1} = z \wedge R(x, z))$

Dies kostet nun $2m + 1$ atomare Formeln.

Nun muss noch festgelegt werden, dass jeder Knoten höchstens einen Vater hat, und wenn der Knoten keinen Vater hat, dann ist er die Wurzel.

- (4) $\forall x \exists y \forall z (\neg y = z \rightarrow \neg R(z, x))$
- (5) $\exists w \forall a \neg R(w, a)$

Die Zeile (4) ist die Beschreibung für maximal einen Vater, wobei die Zeile (5) aussagt, dass es mindestens einen Knoten gibt, der keinen Vater hat. Dass es keine weiteren Wurzeln gibt, wird am Anfang der nächsten Zeilen gezeigt. Da dort aber nur beschrieben wird, dass alle Knoten, die keinen Vater haben, derselbe Knoten sind, muss man auch noch sagen, dass es mindestens einen gibt. Somit kommen hier 3 atomare Formeln hinzu.

Nun kann man immer eine Aussage über alle Nachfolger machen, wobei schon festgesetzt ist, wie viele es sind (m). Und zum Schluss wird noch beschrieben, dass es keinen Nachfolger gibt. Wegen der Lesbarkeit wird definiert $p = \log_m(n+1)$. Dabei muss erwähnt werden, dass nur solche n und m zugelassen sind, die für p eine ganze Zahl ergeben.

- (6) $\exists w ((\forall a (\forall b \neg R(a, b)) \rightarrow a = w)$
- (7) $\exists h_1 R(w, h_1) \wedge \forall r_1 ((R(w, r_1) \rightarrow \exists h_2 R(r_1, h_2)) \wedge \forall r_2 ((R(r_1, r_2) \rightarrow \exists h_3 R(r_2, h_3)) \wedge \dots$
- (8) $\wedge \forall r_{p-1} ((R(r_{p-3}, r_{p-2}) \rightarrow \exists h_p R(r_{p-2}, h_{p-1})) \wedge \forall r_{p-1} (R(r_{p-2}, r_{p-1}) \rightarrow$
- (9) $\forall e \neg R(r_{p-1}, e))) \dots))$

Mit den h_i wird zunächst sichergestellt, dass es eine weitere Ebene gibt, ansonsten würde man auch volle Bäume beschreiben, die kleiner sind. Danach macht man über alle Nachfolgeknoten wieder diese Aussage, bis man bei den Blättern angekommen ist. Hier sagt man nun über alle, dass es keine weiteren Nachfolger gibt. Dies passiert in $2p + 1$ (bez. $2 \log_m(n+1) + 1$) atomaren Formeln.

Nun muss sichergestellt werden, dass diese Formel auch nur diesen bestimmten vollen Baum beschreibt. Jeder fehlende Knoten würde einen Fehler bei einem "∃ h_i " in Zeile (7) erzeugen. Jede zusätzliche Kante in diesem Baum würde die Anzahl der Nachfolger verfälschen, außer bei den Blättern. Hier wurde jedoch explizit gesagt, dass sie keinen Nachfolger haben. Ein weiterer Knoten würde einen Vorgänger benötigen, da es nur eine Wurzel gibt, wie in Zeile (6) beschrieben wird. Der Vorgänger kann nicht im gewünschten Baum sitzen, wegen vorangegangener Überlegung. Allerdings wird nicht verboten, dass es einen Kreis gibt, wobei jeder Knoten im Kreis p Nachkommen haben muss, aber nur einer fortgesetzt wird. Dieses Problem kann man kontrollieren, indem man weitere Knoten verbietet. Aufgrund der Baumstruktur kann man nun sagen, dass jeder Knoten in maximal

3.2 BÄUME

p Schritten von der Wurzel aus erreichbar sein muss. Da folgende Zeilen vor der letzten Klammerschliessung stehen muss, hat man mit der Variablen w auch noch den Knoten selbst:

$$(9) \wedge (\forall f \exists g_1, g_2, \dots, g_{p-1} R(w, g_1) \wedge R(g_1, g_2) \wedge \dots \wedge R(g_{p-2}, g_{p-1}) \wedge (f = g_1 \vee f = g_2 \vee \dots \vee f = g_{p-1}))$$

Damit sind auch zusätzliche Knoten nicht möglich. Hierfür benötigt man $2p - 2$ (bzw. $2 \log_m(n + 1) - 2$) atomare Formeln.

Damit kann man einen vollständigen Baum mit $(2m + 1) + (3) + (2 \log_m(n + 1) + 1) + (2 \log_m(n + 1) - 2)$ (bzw. $4 \log_m(n + 1) + 2m + 3$) atomaren Formeln darstellen. Damit kann man vollständige Bäume, wenn man das m als fest annimmt in $O(\ln(n))$ darstellen.

4 Berechenbarkeit

Auf diese Frage kommt man bei vorliegendem Thema ganz automatisch: Ist die deskriptive Komplexität eines Graphen berechenbar?

Problemstellung: Man soll zeigen, dass es möglich ist, die minimale deskriptive Komplexität für jeden Graphen zu berechnen. Im Folgenden wird der zu beschreibende Graph G genannt und hat n Knoten.

4.1 Allgemeine Vorüberlegungen

Überlegung 1:

Mit m Vorkommnissen atomarer Formeln kann man nur endlich viele Sätze bilden, die logisch nicht äquivalente sind.

Der Beweis erübrigt sich, da dies schnell nachvollziehbar ist.

Überlegung 2:

Aus Überlegung 1 folgt direkt, dass das Wachstumsverhalten der deskriptiven Komplexität in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten echt grösser als $O(1)$ ist (also nicht konstant), da es für jedes endliche m einen maximal großen Graphen gibt, der charakterisiert wird.

4.2 Minimaler Satz der den Graphen, aber keine kleineren Graphen, beschreibt

Man hat einen Graphen G mit n Knoten.

Algorithmus 4.1 :

Man setzt $m = 1$

Schritt 1: Man bildet einen Satz mit m atomaren Formeln und testet, ob dieser G wahr macht. Hat man alle Sätze mit m atomaren Formeln durchprobiert, erhöht man das m um eins, und testet weiter, bis man einen Satz findet, den der Graph G wahr macht. Diesen Satz nennen wir φ .

Schritt 2: Nun muss man testen, ob φ noch von anderen Graphen wahr gemacht wird. Dazu testet man alle Graphen, die weniger oder gleich viele Knoten wie G haben. Macht irgendein zu G verschiedener Graph das φ wahr, so kehrt man zu Schritt 1 zurück, ansonsten hat man einen kürzesten Satz gefunden, der den Graphen G beschreibt, aber keine kleineren Graphen.

Dieser Algorithmus funktioniert, da es für jedes m nur endlich viele Sätze gibt (Überlegung 1), und auch für jede Knotenzahl endlich viele nichtisomorphe Graphen. Des Weiteren terminiert dieser Algorithmus, da er spätestens bei dem kanonischen Satz ein korrektes φ liefert.

Das Problem ist, dass man ohne weitere Überlegungen nicht sagen kann, ob φ nicht auch von einem noch größeren Graphen charakterisiert wird. Um jetzt einen charakterisierenden

Satz zu bekommen, kann man den gefundenen Satz mit der Aussage, dass es höchstens n Knoten gibt, durch ein logisches "und" verknüpfen. Dieser Satz charakterisiert G nun und ist um maximal n größer als der kürzeste charakterisierende Satz.

Außerdem kann man mit diesem Algorithmus alle Sätze konstruieren, die keine kleineren oder gleichgroßen Graphen beschreiben. Da jeder charakterisierende Satz diese Eigenschaft auch besitzt, muss man nur noch die aus diesem Algorithmus fallenden Sätze nacheinander untersuchen, und der erste, der von keinem nicht isomorphen Graphen zu G wahr gemacht wird, ist ein kürzester charakterisierender Satz.

4.3 Versuch eines Beweises

Auch wenn dieser Ansatz nicht zu dem gewünschten Ergebnis führt, dass die deskriptive Komplazität berechenbar ist, so kommt doch ein interessantes Ergebnis heraus, weswegen dieses Unterkapitel beibehalten wurde.

In diesem Abschnitt wird zur besseren Lesbarkeit die Anzahl der Knoten immer mit einem Großbuchstaben und die Anzahl der atomaren Formeln immer mit einem Kleinbuchstaben bezeichnet.

Zuerst wird folgende Funktion definiert: $f(A) = b$

Hierbei ist b die atomare Komplexität der kleinsten Formel, die irgendeinen Graphen mit der Knotenzahl A beschreibt, aber keinen Graphen mit weniger Knoten.

Diese Funktion ist berechenbar: Man wendet auf jeden Graphen mit der Größe A einen leicht zu *Algorithmus 4.1* veränderten Algorithmus an. Bei diesem leicht veränderten Algorithmus testet man im 2. Schritt nur alle kleineren Graphen durch und nicht mehr die gleichgroßen Graphen. Aus der Menge der Sätze, die der *Algorithmus 4.1* liefert, sucht man den kürzesten, und gibt diese Länge an.

Das Problem ist nur, dass diese Funktion nicht monoton steigend sein muss. Aber gibt es eine Funktion, die von f dominiert wird, berechenbar ist, stetig steigend ist und gegen unendlich geht, so ist auch die deskriptive Komplexität berechenbar. Im Folgenden wird angenommen, dass f_{help} alle geforderten Voraussetzungen erfüllt.

Hat man einen Satz φ , der von dem Graphen G_{graph} wahr gemacht wird, so kann man nun eine obere Schranke angeben, bis zu der man alle Graphen durchprobieren muss, um zu sehen, ob der Satz den Graphen G_{graph} charakterisiert. Zunächst baut man den Satz $\varphi_{help} \equiv \varphi \wedge$ (mindestens die Anzahl der Knoten von G_{graph}). φ_{help} hat die Größe von $\varphi + (\text{Anzahl der Knoten von } G_{graph} - 1) = x$. Jetzt rechnet man für f_{help} alle Werte ab 1 aus, bis man auf eine Lösung größer als x kommt, also $f_{help}(Y) > x$. Nun ist Y die obere Schranke. Denn wenn ein Graph, der nicht isomorph zu G_{graph} ist, den Satz φ wahr macht und die Knotenzahl K hat, so muss $K < Y$ sein. Ansonsten hätte man mit φ_{help} einen Satz konstruiert, der kleiner ist als $f_{help}(K)$, da für $K > Y$ gilt: $f_{help}(K) \geq f_{help}Y$. Dies ist wegen der Definition von f_{help} nicht möglich.

Theorem 4.2 :

Es gibt unendlich viele Schranken bei f , ab denen jeder Wert größer ist als die vorhergehenden. Ist B so eine Schranke, so gilt: $\forall C, D [C > B \wedge D \leq B \Rightarrow f(C) > f(D)]$.

Es folgt nun der Beweis zu diesem Theorem. Hierfür wird zunächst eine weitere Funktion g definiert: $g(a) = B$

B ist die Anzahl der Knoten des größten Graphen, der durch einen Satz mit a atomaren Formeln beschrieben wird, wobei durch diesen Satz kein Graph mit weniger Knoten beschrieben wird. Also kann man mit einem Satz der Größe a maximal einen Graphen mit B Knoten beschreiben, ohne dass ein kleinerer Graph diesen Satz wahr macht.

Diese Funktion ist monoton steigend, da man jeden Satz beliebig verlängern kann, ohne die Aussage zu verändern. Also gilt: $a < b \Rightarrow g(a) \leq g(b)$.

Allerdings ist nicht klar, ob diese Funktion berechenbar ist.

Jeder Wert, den die Funktion g nun annehmen kann, ist so eine Schranke für die Funktion f , die am Anfang des Absatzes beschrieben wurde. Die einzige Überlegung, die man zwischen den Funktionen benötigt, ist folgende: $f(A) = b \Rightarrow g(b) \geq A$.

Dies sagt aus: Wenn man einen Graphen mit A Knoten durch einen Satz der Größe b beschreiben kann, ohne dass kleinere Graphen beschrieben werden, kann man mit einem Satz der Größe b mindestens einen Graphen mit A Knoten beschreiben, ohne dass kleinere beschrieben werden.

Angenommen: $g(x) = X, g(y) = Y, x < y, X < Y, f(Z) = z, X < Z \leq Y$. Dann ist zu zeigen: $g(z) \leq Y, z > x$

Es reicht zu zeigen, dass $g(z) \leq Y$ gilt, da es nur ein beliebiges a mit folgenden Eigenschaften geben muss: $g(a) = Y$ und $z \leq a$. Und da g monoton steigend ist, sind beide Aussagen äquivalent.

Zuerst wird gezeigt: $g(z) \leq Y$

Wegen vorangegangener Überlegung gilt: $g(z) \leq Z$, und da $Z \leq Y$ gilt auch: $g(z) \leq Y$

Nun wird gezeigt: $z > x$

Dazu wird angenommen, es gilt: $x \geq z$

$\Rightarrow g(z) \leq g(x)$ (da g monoton steigend)

$\Rightarrow Z > X = g(x) \geq g(z) \geq Z$

Hier entsteht ein Widerspruch, da nicht $Z > Z$ gelten kann.

$\Rightarrow z > x$

Daher gibt es immer wieder Schranken B , ab denen gilt:

$\forall C, D [C > B \wedge D \leq B \Rightarrow f(C) > f(D)]$. Diese Schranken sind genau die Werte, die g annehmen kann, bloß ist nicht geklärt, ob g eine berechenbare Funktion ist.

4.4 Beweis der Berechenbarkeit

Nun kommt ein anderer Ansatz, der auch definitiv zum gewünschten Ergebnis führt.

Sei φ ein möglicher kürzester charakterisierender Satz für den Graph G . Das heisst, φ ist ein kürzester Satz, den G wahr macht, der aber keine Eigenschaft von kleineren oder gleich großen Graphen ist und von dem man nicht weiß, ob auch ein größerer Graph diesen wahr

macht. Solche Sätze kann man mit *Algorithmus 4.1* erzeugen. Nun kann man immer einen kanonischen Satz zum Graphen G erzeugen, welchen wir ψ nennen.

Genau dann, wenn φ den Graphen G charakterisiert, ist $\varphi \rightarrow \psi$ eine allgemein gültige Aussage. Damit würde gelten:

$$\models \varphi \rightarrow \psi$$

Die Menge der allgemein gültigen Sätze einer Sprache ist rekursiv aufzählbar. Das bedeutet, wenn φ ein charakterisierender Satz für G ist, wird der Satz $\varphi \rightarrow \psi$ in endlicher Zeit aufgezählt.

Um auch in endlicher Zeit zu einem Ergebnis zu kommen, wenn φ kein charakterisierender Satz ist, testet man zusätzlich alle Graphen die größer als G sind, ob diese das φ wahr machen. Ist φ nun kein charakterisierender Satz für G , findet man in endlicher Zeit einen Graphen verschieden von G , welcher das φ wahr macht.

Dann holt man sich mit dem *Algorithmus 4.1* den nächsten möglichen kürzesten charakterisierenden Satz.

Auch wenn hiermit theoretisch die Berechenbarkeit bewiesen wurde, hat dieser Algorithmus keinen praktischen Nutzen, da es schon für kleine Graphen extrem lange dauert, auf diese Weise einen kürzesten charakterisierenden Satz zu berechnen.

Hier sei ein Dank an Herrn Fehm ausgesprochen, der gleichzeitig einen von der Idee her identischen Beweis gefunden hat.

5 Vokabular ohne Gleichheit

In diesem Kapitel sollen Überlegungen gemacht werden, wie man einen Graphen möglichst kurz charakterisieren kann, ohne dass man hierbei die Gleichheit verwenden darf. Zunächst müssen hierbei wegen der eingeschränkten Logik gewisse Dinge umdefiniert werden. Danach werden Überlegungen angestellt, welche Graphen überhaupt charakterisiert werden können, und zum Schluss, welche Möglichkeiten der Verkürzungen es gibt.

5.1 Neudefinitionen und Vorüberlegungen

Da es nicht möglich ist, in FOL nur mit Verwendung einer zweistelligen Kantenrelation ohne Gleichheit die Knotenzahl zu beschränken, wird die Charakterisierung wie folgt umdefiniert:

Definition 5.1 :

Der Satz φ charakterisiert den Graphen G gleichheitsfrei genau dann, wenn für alle Graphen H mit derselben Mächtigkeit wie G ($|G| = |H|$) gilt: H macht den Satz φ genau dann wahr, wenn H isomorph ist zu G .

Nun muss man sich überlegen, wie man zwei Knoten überhaupt unterscheiden kann. Dafür führen wir einen neuen Begriff ein:

Definition 5.2 :

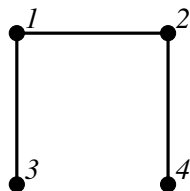
Zwei Knoten a und b werden Quine-identisch genannt, wenn gilt:

$$a =_q b \Leftrightarrow (\forall x R(a, x) \Leftrightarrow R(b, x) \wedge R(x, a) \Leftrightarrow R(x, b))$$

Sind bei einem Graphen G nun alle Knoten paarweise nicht Quine-identisch, kann man diesen Graphen gleichheitsfrei charakterisieren (Gemäß der *Definition 5.1*). Die Vorgehensweise ist hierbei folgende: Man bindet so viele Variablen mit einem Existenzquantor, wie der Graph Knoten hat, interpretiert jede Variable als einen Knoten, und gibt alle Kanten und Nicht-Kanten zwischen ihnen an. Nun muss jede Variable als ein anderer Knoten interpretiert werden, da man zu je zwei Knoten x und y mindestens einen weiteren Knoten z findet, so dass gilt: $R(x, z)$ und $\neg R(y, z)$, $R(z, x)$ und $\neg R(z, y)$, $\neg R(x, z)$ und $R(y, z)$ oder $\neg R(z, x)$ und $R(z, y)$. Dieser Satz hat dann eine Größe von n^2 .

Sind nun aber mindestens zwei Knoten Quine-identisch, kann man den Graphen auf diese Weise nicht charakterisieren, da auch ein Graph, bei dem x und y als derselbe Knoten interpretiert werden, den Satz wahr macht. Nun kann man aber einen Knoten zu dem um eins kleineren Graphen hinzufügen, und beliebig mit anderen Knoten verbinden.

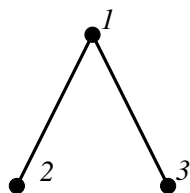
Beispiel 5.3 :



Formel zu *Beispiel 5.3*:

$$\begin{aligned} & \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \neg R(x_1, x_1) \wedge \\ & \neg R(x_2, x_2) \wedge \neg R(x_3, x_3) \wedge \\ & \neg R(x_4, x_4) \wedge \\ & R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_1) \wedge \\ & R(x_2, x_4) \wedge R(x_4, x_2) \wedge \\ & R(x_1, x_3) \wedge R(x_3, x_1) \wedge \\ & \neg R(x_3, x_4) \wedge \neg R(x_4, x_3) \wedge \\ & \neg R(x_1, x_4) \wedge \neg R(x_4, x_1) \wedge \\ & \neg R(x_2, x_3) \wedge \neg R(x_3, x_2) \end{aligned}$$

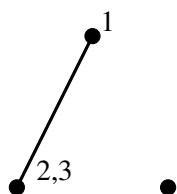
Beispiel 5.4 :



Formel zu *Beispiel 5.4*:

$$\begin{aligned} & \exists x_1, x_2, x_3 \neg R(x_1, x_1) \wedge \neg R(x_2, x_2) \wedge \neg R(x_3, x_3) \wedge \\ & R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_1) \wedge R(x_1, x_3) \wedge R(x_3, x_1) \wedge \\ & \neg R(x_2, x_3) \wedge \neg R(x_3, x_2) \end{aligned}$$

Da das *Beispiel 5.4* zwei Knoten hat, die Quine-identisch sind, können diese beiden Knoten auch als der gleiche interpretiert werden. Dadurch ergibt sich z.B. folgender Graph, der die vorstehende Formel auch wahr macht:



Definition 5.5 :

Ein Graph, bei dem die Quine-identischen Knoten zusammengezogen werden, wird ein *Quine-gekürzter Graph* genannt.

Bei dem *Beispiel 5.4* besteht der Quine-gekürzte Graph aus zwei Punkten, die miteinander verbunden sind. Also der linke Teilgraph des Gegenbeispiels. Der Quine-gekürzte Graph ist also genau dann kleiner als der Ausgangsgraph, wenn es mindestens zwei Punkte gibt, die Quine-identisch sind.

Sind nun aber alle Knoten paarweise Quine-identisch, so kann man eine Aussage über alle Knoten gleichzeitig machen. Anzumerken ist hier, dass es nur 2 Graphklassen gibt, bei denen alle Knoten Quine-identisch sind. Diese sind der leere Graph und der volle Graph, bei dem jeder Knoten auch eine Selbstkante hat. Diese kann man immer mit $\forall x, y \neg R(x, y)$ bzw. $\forall x, y R(x, y)$ beschreiben. Da die Knotenanzahl festgelegt ist, charakterisiert man den Graphen gleichheitsfrei mit der atomaren Komplexität von eins.

Somit ergibt sich folgendes Theorem:

Theorem 5.6 :

Alle Graphen, bei denen entweder alle verschiedenen Knoten paarweise Quine-identisch sind oder bei denen alle Knoten paarweise nicht Quine-identisch sind, können gleichheitsfrei charakterisiert werden.

Den *Beispielgraphen 5.4* kann man sogar auch charakterisieren, indem man alle nicht-gewünschten Graphen ausschließt, die durch die Quine-Identität den Standardsatz auch wahr machen. Um möglichst wenige zusätzliche Graphen zu beschreiben, gibt man folgende Eigenschaften mit an: Der Graph ist symmetrisch, kein Knoten hat eine Selbstkante und jeder Knoten ist mit mindestens einem weiteren Knoten verbunden. Mit diesen Informationen macht außer den Graphen, die zu dem gewünschten Graphen isomorph sind, nur der volle Graph ohne Selbstkanten den Satz wahr.

Gleichheitsfreier charakterisierender Satz zum *Beispiel 5.4*:

$$\forall x, y R(x, y) \Rightarrow R(y, x) \wedge$$

$$\forall z \neg R(z, z) \wedge \exists u R(z, u) \wedge$$

$$\neg(\exists v_1, v_2, v_3 R(v_1, v_2) \wedge R(v_2, v_3) \wedge R(v_3, v_1))$$

Die Graphen explizit auszuschließen, die man nicht beschreiben will, ist nur möglich, wenn der Graph G folgende Eigenschaft hat. Der auf G entstandene Quine-gekürzte Graph wird im Folgenden als G_{kurz} bezeichnet. Jeder von G_{kurz} erweiterte Graph, der die gleiche Mächtigkeit hat wie G , ist isomorph zu G , oder hat keine zwei Punkte, die Quine-identisch sind.

Vermutung 5.7 :

Alle Graphen bis auf wenige Ausnahmen, bei denen mindestens zwei aber nicht alle Knoten Quine-identisch sind, sind nicht gleichheitsfrei charakterisierbar.

Wahrscheinlich sind die beiden einzigen Graphen, bei denen mindestens zwei Knoten aber nicht alle Knoten Quine-identisch sind, und die charakterisiert werden können, folgende beiden:



Bei den übrigen kleinen Knoten habe ich bisher keine Charakterisierung gefunden, und bei größeren liegt die Vermutung auf der Hand, dass man immer den Quine-gekürzten Graphen erweitern kann, so dass ein nicht isomorpher Graph entsteht, der mindestens zwei Quine-identische Punkte hat, und man diesen auch nicht durch andere Eigenschaften des Graphens ausschließen kann.

Sollte diese Vermutung zutreffen, wäre es entscheidbar, ob ein Graph in der gleichheitsfreien Logik charakterisierbar ist oder nicht.

5.2 Verkürzung der Charakterisierung

5.2.1 Berechenbarkeit

Die Berechenbarkeit für die minimale Charakterisierung eines Graphens ohne Gleichheit ist nach den Überlegungen des 3. Kapitels nicht mehr schwer. Man muss nur sicher sein, dass es eine Charakterisierung gibt.

Ohne die Gleichheit kann man weniger unterschiedliche Sätze derselben Länge bilden, als mit der Gleichheit. Daher folgt aus der Vorüberlegung 1 aus Kapitel 4.1, dass nur endlich viele verschiedene Sätze mit der gleichen Länge existieren.

Algorithmus 5.8 :

Man hat einen Graphen G , den man minimal charakterisieren will.

Man setzt $m = 1$

Schritt 1: Man bildet einen Satz mit m atomaren Formeln und testet, ob der Graphen G diesen wahr macht. Hat man alle Sätze mit m atomaren Formeln durchprobiert, erhöht man das m um eins, und testet weiter, bis man einen Satz findet, den der Graph wahr macht. Diesen Satz nennt man φ .

Schritt 2: Nun muss man testen, ob φ noch von anderen Graphen wahr gemacht wird. Dazu testet man alle Graphen, die dieselbe Anzahl an Knoten haben wie G . Macht irgendeiner dieser Graphen das φ auch wahr, so kehrt man zu Schritt 1 zurück, ansonsten hat man einen charakterisierenden Satz für G gefunden.

Anmerkung: Dies ist auch gleichzeitig ein Beweis, dass die ohne Gleichheit charakterisierbaren Graphen mindestens rekursiv aufzählbar sind.

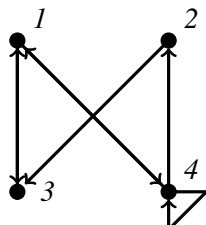
5.2.2 Verkürzung eines Satzes

In diesem Kapitel wird ein charakterisierender Satz für Graphen, in denen keine zwei Punkte Quine-identisch sind, verkürzt, ohne seine Eigenschaften zu verändern. Dies gilt allerdings nur für die gleiche Anzahl von Knoten. Würde man auch größere oder kleinere Graphen betrachten, würde sich die Eigenschaften des Satzes schon verändern.

Zunächst kann man jeden Graphen, der keine Selbstkanten hat oder symmetrisch ist, durch die Formel $\forall x \neg R(x, x)$ bzw. $\forall x, y R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ ausdrücken, und verkürzt so die charakterisierende Formel, sobald der Graph mindestens drei Knoten hat. Die Eigenschaft, dass der Graph keine Selbstkanten hat, rentiert sich sogar schon ab zwei Knoten. Fast genauso kann man die Eigenschaften "alle Knoten haben Selbstkanten" und "es gibt keine symmetrische Kanten" darstellen. Natürlich gibt es noch weitere Eigenschaften, die man darstellen kann, aber da muss man von Fall zu Fall schauen, ob es etwas bringt, oder nicht.

Nun kann man häufig noch weitere atomare Formeln durch das Benutzen eines Allquantor einsparen. Dies wird am besten anhand eines Beispielles deutlich.

Beispiel 5.9 :



Dieser Graph wird nun zunächst in die Matrix-Darstellung übertragen:

	1	2	3	4	
1	-	-	+	+	
2	-	-	+	-	Eine Kante geht von dem Knoten der Spalte zu dem Knoten der Zeile.
3	+	-	-	+	
4	+	+	-	+	

Hier erkennt man nun einige Auffälligkeiten des Graphen. Z.B. hat jeder Knoten, der zum Knoten 1 eine Kante hat, keine Kante zum Knoten 3 und eine Kante zum Knoten 4 und auch wieder eine Kante von Knoten 1. Eine weitere Regel, die man aus der Matrix-Darstellung sehen kann ist, dass von jedem Knoten, der vom Knoten 1 keine Kante, oder vom Knoten 3 eine Kante hat, keine Kante zum Knoten 2 und eine Kante zum Knoten 4 hat. Diese Regeln und noch vier weitere werden nun in einer gleichheitsfreien logischen Formel beschrieben, wobei die Variable k_n den Knoten n beschreiben soll:

- (a) $\forall x R(x, k_1) \Rightarrow (\neg R(x, k_3) \wedge R(x, k_4) \wedge R(k_1, x))$
- (b) $\forall x \neg R(x, k_1) \Rightarrow (\neg R(x, k_2) \wedge R(x, k_3))$
- (c) $\forall x \neg R(k_1, x) \Rightarrow (\neg R(k_2, x) \wedge R(k_4, x))$
- (d) $\forall x \neg R(k_2, x) \Rightarrow R(k_4, x)$
- (e) $\forall x (\neg R(k_1, x) \vee R(k_3, x)) \Rightarrow (\neg R(k_2, x) \wedge R(k_4, x))$

Nun reicht es aus, für die Knoten vor dem Folgepfeil die dazugehörigen Kanten anzugeben, und man spart dadurch einige Atomformeln. Außerdem sagt die Formel (a) noch aus, dass es keine ungerichtete Kante zum Knoten 1 gibt. Daher spart man mit der Formel (a) drei atomare Formeln. Mit der Formel (e) spart man zwei atomare Formeln und mit den Formeln (b), (c) und (d) jeweils eine. Allerdings bringen die Formeln (b), (c), (d) und (e) keine Einsparungen mehr, da sich die eingesparten Kanten mit den eingesparten Kanten von (a) teilweise überdecken. Daher ist ein um drei Atomformeln verkürzter charakterisierender Satz für diesen Graphen:

$$\begin{aligned} \exists k_1, k_2, k_3, k_4 \forall x R(x, k_1) \Rightarrow & (\neg R(x, k_3) \wedge R(x, k_4) \wedge R(k_1, x)) \wedge \\ & R(k_3, k_1) \wedge R(k_2, k_3) \wedge R(k_1, k_4) \wedge R(k_4, k_2) \wedge \neg R(k_1, k_1) \wedge \neg R(k_3, k_2) \wedge \neg R(k_1, k_2) \wedge \\ & \neg R(k_2, k_2) \wedge \neg R(k_2, k_4) \end{aligned}$$

Nochmals anzumerken ist, dass dieser Satz nicht logisch äquivalent zum Standardsatz ist.

5.2 VERKÜRZUNG DER CHARAKTERISIERUNG

Bei Graphen mit der Größe $\neq 4$ werden nicht zwingend dieselben Graphen beschrieben. Aber bei Graphen mit Größe 4 wird nur das *Beispiel 5.9* charakterisiert.

Um die Korrektheit formal zu zeigen, müsste man die Gleichheit wieder einführen und mit der Aussage verbinden, dass es exakt 4 Knoten gibt. Nun könnte man wieder mit dem Gentzenkalkül zeigen, dass der Standardsatz mit der Anzahlaussage logisch äquivalent zu dem verkürzten Satz mit der Anzahlaussage ist.

6 Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Versuch unternommen, individuelle Graphen in FOL möglichst kurz zu beschreiben. Also wäre die nächste Überlegung, andere Strukturen zu beschreiben, wie einstellige Relationen, mehrstellige Relationen, oder gar mit mehreren Relationen.

Eine weitere Idee ist, Logiken höherer Ordnung zu untersuchen, da sich auf diese Weise sicherlich eine weitere deutliche Verkürzung finden lässt. Wenn man zum Beispiel nur sagen will, dass es genau n Dinge gibt, so lässt sich dies in Second Order Logic logarithmisch darstellen, wobei man in FOL wahrscheinlich $2n - 1$ atomare Formeln benötigt. Andeutungsweise könnte man dies in Second Order Logic folgendermaßen darstellen:

Anstatt zu sagen, dass es genau n Dinge gibt, kann man auch sagen, dass es eine einstellige Relation gibt, die $n/2$ Elemente hat, und es eine weitere einstellige Relation gibt, die disjunkt zur ersten Relation ist, zwischen denen es aber eine Bijektion gibt. Nun muss man noch sagen, dass alle Elemente in X oder Y sind, und damit ist die Anzahlaussage fest. In der Formel sieht dies folgendermaßen aus, wobei Einfachheit halber davon ausgegangen wird, dass n gerade ist. Außerdem wird für die Darstellung der Bijektion eine Funktion verwendet, da es hier nicht auf die exakte Größe der Formel ankommt, und dies so deutlich plausibler dargestellt werden kann. Wie im ersten Kapitel schon erwähnt, kann jede n -stellige Funktion durch eine $n + 1$ -stellige Relation dargestellt werden:

$$(1) \exists X, Y \exists f [\forall z (X(z) \Rightarrow \neg Y(z) \wedge Y(z) \Rightarrow \neg X(z))]$$

$$(2) \forall u (X(u) \Rightarrow Y(f(u)) \wedge$$

$$(3) \forall u, v (X(u) \wedge X(v) \wedge f(u) = f(v) \Rightarrow u = v) \wedge$$

$$(4) \forall u (Y(u) \Rightarrow \exists v (X(v) \wedge f(v) = u))$$

$$(5) \forall w X(w) \vee Y(w)$$

$$(6) \forall a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n}{2}-1} \exists b ((\bigwedge_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1} \neg a_i = b) \wedge X(b))$$

$$(7) \exists a_1, a_2, \dots, a_{\frac{n}{2}} (\forall b X(b) \Rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} a_i = b)$$

Damit hat man die Anzahl atomarer Formeln halbiert, abgesehen von einem konstanten Faktor. Nun kann man die Anzahlaussage für das X wieder durch zwei weitere Relationen beschreiben, und kommt so mit dem "divide and conquer"-Verfahren auf eine logarithmische Anzahl atomarer Formeln. Will man eine ungerade Anzahl beschreiben, muss man die Zeile (5) folgendermaßen abändern:

$$\exists z (\neg X(z) \wedge \neg Y(z) \forall w (X(w) \vee Y(w) \vee w = z))$$

Literatur

- [1] J.W. Degen: *Some observations on intuitionistic equality* (to appear)
- [2] Gaisi Takeuti: *Proof Theory* 2nd Edition, 1987
- [3] Arno Fehm: *email* 2008