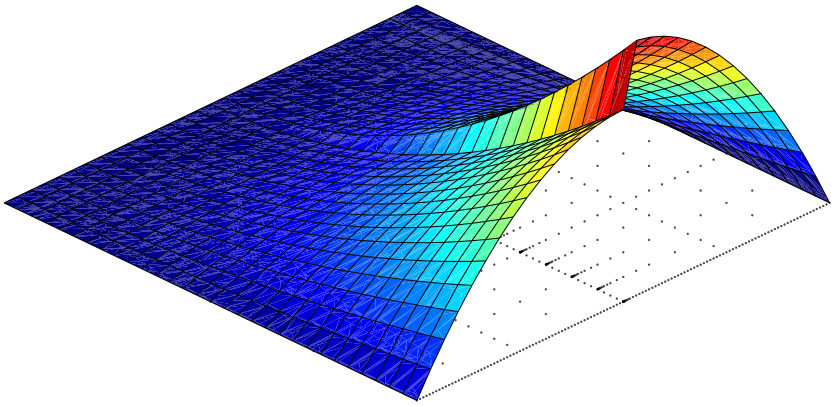
FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT • DEPARTMENT INFORMATIK

Lehrstuhl für Informatik 10 (Systemsimulation)

# Numerische Integration lokaler Steifigkeitsmatrizen auf dünnen Gittern im d-dimensionalen Raum

Tim Rheinfels



Bachelorarbeit

# Numerische Integration lokaler Steifigkeitsmatrizen auf dünnen Gittern im d-dimensionalen Raum

Tim Rheinfels

Bachelorarbeit

| | |
|---|---|
| Aufgabensteller: | Prof. Dr. Christoph Pflaum |
| Betreuer: | Rainer Hartmann, M. Sc. |
| Bearbeitungszeitraum: | 01.05.2016 - 03.08.2016 |

**Erklärung:**

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Der Universität Erlangen-Nürnberg, vertreten durch den Lehrstuhl für Systemsimulation (Informatik 10), wird für Zwecke der Forschung und Lehre ein einfaches, kostenloses, zeitlich und örtlich unbeschränktes Nutzungsrecht an den Arbeitsergebnissen der Bachelorarbeit einschließlich etwaiger Schutzrechte und Urheberrechte eingeräumt.

Erlangen, den 3. August 2016 .....

**Zusammenfassung**

Lokale Steifigkeitsmatrizen entstammen der finiten Elemente Analyse, mit welcher Lösungen zu partiellen Differentialgleichungen approximiert werden können. Die Einträge dieser Matrizen ergeben sich als Integrale über ein einzelnes finites Element. Die Integranden können Singularitäten und andere Unstetigkeiten enthalten. Wegen diesem Umstand und der potentiell hohen Dimension $d$, wird im Rahmen dieser Arbeit ein Algorithmus auf Basis dünner Gitter hergeleitet, implementiert und evaluiert, um lokale Steifigkeitsmatrizen auf $d$-dimensionalen, rechtwinkligen finiten Elementen für eine Vielzahl von Integranden zu berechnen.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Problemstellung** . . . . . **6**

**2 Grundlagen** . . . . . **7**
2.1 Notation . . . . . 7
2.2 Lokale Steifigkeitsmatrizen . . . . . 8
2.3 Numerische Integration . . . . . 10
2.4 Basisdarstellung von Funktionen . . . . . 11
2.5 Dünne Gitter . . . . . 17
2.6 Funktionen mit nicht verschwindendem Rand . . . . . 19
2.7 Adaptive Verfeinerung . . . . . 21
2.8 Singularitäten . . . . . 26

**3 Softwareentwurf und Implementierung** . . . . . **29**
3.1 Schnittstelle . . . . . 29
3.2 Aspekte der Implementierung . . . . . 30

**4 Evaluierung** . . . . . **32**
4.1 Testreihe 1: Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter . . . . . 32
4.2 Testreihe 2: Variation der Schranke $\gamma$ . . . . . 40
4.3 Testreihe 3: Berechnung lokaler Steifigkeitsmatrizen . . . . . 42

**5 Zusammenfassung und Ausblick** . . . . . **45**

**6 Verzeichnisse** . . . . . **46**

**7 Literatur** . . . . . **47**

# 1 Problemstellung

Zu berechnen sind lokale Steifigkeitsmatrizen, wie sie bei der finiten Elemente (FEM) Diskretisierung partieller Differentialgleichung auftreten. Die Matrixkomponenten ergeben sich als Integrale über ein Gebiet $\Omega$. Der Integrand ist abhängig von der speziellen Diskretisierung, weshalb keine weitere Aussage über seine Form getroffen werden kann. Als spezielles Verfahren der numerischen Integration soll der Integrand durch eine interpolierende Funktion auf Basis dünner Gitter approximiert werden, deren Integral über $\Omega$ analytisch berechnet werden kann. Die Gestalt von $\Omega$ soll auf $d$-dimensionale Quader, also rechtwinklige Gebiete, beschränkt sein.

Die Verwendung dünner Gitter ist durch die potentiell hohe Dimension $d$ motiviert, da sie im Vergleich zu vollen Gittern mit weniger Gitterpunkten ähnlich genaue Näherungen erbringen. Dafür muss die zu approximierende Funktion allerdings hinreichend glatt sein. Da diese Voraussetzung durch das fehlende a-priori Wissen über die Integranden nicht als erfüllt angesehen werden kann, erfolgt für die verwendeten Gitter eine adaptive Verfeinerung. Dünne Gitter berücksichtigen nur Funktionen, welche auf dem Rand identisch null sind, weshalb sie um eine Randwertbehandlung erweitert werden müssen. Im Falle von Singularitäten im Integrtionsgebiet müssen weitere Maßnahmen getroffen werden.

In Abschnitt 2 wird ein Algorithmus zur Integration lokaler Steifigkeitsmatrizen auf adaptiven dünnen Gittern erarbeitet und um eine Methode zur Behandlung von Singularitäten erweitert. Zunächst wird anhand der stationären Wärmeleitungsgleichung für inhomogene Materialien exemplarisch gezeigt, wie die zu integrierenden Terme aus einer FEM Diskretisierung hervorgehen. Danach werden für allgemeine $d$-dimensionale Integranden wesentliche Aspekte numerischer Integration und die Grundlagen hierarchischer Basen und dünner Gitter nach dem Ansatz in [1] hergeleitet. Ferner wird eine Randwertbehandlung durch Erweiterung der hierarchischen Basis um eine weitere Stufe nach [2] vorgestellt. Auf Grundlage der in [3] beschriebenen Methode, dünne Gitter als Graphen darzustellen, wird eine Methode zur adaptiven Verfeinerung anhand eines lokalen Kriteriums erarbeitet. Zuletzt wird die Behandlung singulärer Funktionen beschrieben. Abschnitt 3 befasst sich mit der Implementierung des beschriebenen Algorithmus und ihren Randbedingungen. Im Anschluss daran findet in Abschnitt 4 eine Evaluierung anhand verschiedener Integranden statt. Außerdem wird eine lokale Steifigkeitsmatrix berechnet. Die Ergebnisse werden verwendet, um die zentrale Frage dieser Arbeit zu beantworten:

Eignet sich numerische Integration auf dünnen Gittern dazu, lokale Steifigkeitsmatrizen einer FEM Diskretisierung mit $d$-dimensionalen, rechtwinkligen Elementen zu berechnen?

# 2 Grundlagen

Bevor der Integrationsalgorithmus hergeleitet wird, soll zuerst die Notwendigkeit numerischer Integration verdeutlicht werden: Obwohl viele Gebietsintegrale durch Rückführen auf Riemannsche Integrale und Auswerten einer Stammfunktion gelöst werden können, ist dies nicht immer der Fall. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Gaußsche Normalverteilung (vgl. [4, S. 831f]). Mit dem Erwartungswert $\mu$ und der Varianz $\sigma^2$ ergibt sich ihre Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$ zu

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.1}$$

Die Verteilungsfunktion entsteht durch Integration:

$$F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt \tag{2.2}$$

Für die Stammfunktion des Integranden existiert keine geschlossene Form. Numerische Integration bietet die Möglichkeit das Integral trotzdem in Form einer Näherungslösung zu bestimmen.

## 2.1 Notation

Für die Dimension $d \in \mathbb{N}$, einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, die Multiindizes $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{N}_0^d$ und einem Skalarfeld $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ finden in dieser Arbeit folgende Schreibweisen Verwendung:

$$\underline{\lambda} := (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) \tag{2.3}$$

$$\lambda^{\underline{\alpha}} := (\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_2}, \ldots, \lambda^{\alpha_d}) \tag{2.4}$$

$$(\underline{\alpha} \; op \; \underline{\beta})_i := \alpha_i \; op \; \beta_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\} \tag{2.5}$$

$$(\vec{x} \; op \; \underline{\alpha})_i := x_i \; op \; \alpha, \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\} \tag{2.6}$$

$$(\underline{\alpha} \; op \; \vec{x})_i := \alpha_i \; op \; x, \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\} \tag{2.7}$$

$$||\alpha||_1 := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \tag{2.8}$$

$$||\alpha||_\infty := \max\{ \alpha_i \mid i \in \{1, \ldots, d\} \} \tag{2.9}$$

$$D^{\underline{\alpha}} f := \frac{\partial^{||\underline{\alpha}||_1} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_d} x_d} \tag{2.10}$$

Hierbei bezeichnen Gleichung 2.5 bis Gleichung 2.7 die komponentenweise Anwendung eines binären Operators *op* auf zwei Multiindizes bzw. einen Multiindex und einen Vektor. Ist *op* ein Relationsoperator, so muss dieser für alle Komponenten erfüllt sein.

Mit $C^n(\Omega), n \in \mathbb{N}$ sei der Raum der auf dem Gebiet $\Omega$ $n$ mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet.

Der Funktionenraum $H^n(\overline{\Omega})$ bezeichne die Menge aller Funktionen, deren schwache gemischte partielle Ableitungen bis zum Grad $n$ im Lebesgueraum $L^2(\Omega)$ liegen. Dabei ist $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$

ein $d$-dimensionales abgeschlossenes Gebiet.

$$H^n(\overline{\Omega}) := \left\{ f : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R} \;\middle|\; D^{\underline{\alpha}} f \in L^2(\Omega) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{N}_0^d,\ ||\underline{a}||_\infty \leq n \right\} \tag{2.11}$$

Ferner sei $H_0^n(\overline{\Omega})$ der Raum aller Funktionen aus $H^n(\overline{\Omega})$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ identisch null sind:

$$H_0^n(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in H^n(\overline{\Omega}) \;\middle|\; f(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \right\} \tag{2.12}$$

## 2.2 Lokale Steifigkeitsmatrizen

Wegen der großen Vielfalt partieller Differentialgleichungen und der Komplexität der Methode der finiten Elemente, kann an dieser Stelle keine allgemeine, detaillierte Darstellung erfolgen. Exemplarisch wird das folgende Randwertproblem betrachtet:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda(\vec{x}) \nabla u(\vec{x})) = f(\vec{x}) & \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) = 0 & \vec{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

Seine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ beschreibt die stationäre Temperaturverteilung in einem Körper mit ortsabhängiger Wärmeleitfähigkeit $\lambda : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ und konstanter Randtemperatur (vgl. [5, S. 219f]). Das Skalarfeld $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ fungiert als Quellenterm.

Nach [5, S. 301ff] existiert mit

$$\int_\Omega \lambda(\vec{x})\, \nabla u(\vec{x}) \cdot \nabla v(\vec{x})\, d\Omega = \int_\Omega f(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.14}$$

die schwache Formulierung von Gleichung 2.13. Ihre Lösung $u$ liegt, wie auch die Testfunktionen $v$, in $H_0^1(\Omega)$.
Die Diskretisierung erfolgt durch das Ritz-Galerkin-Verfahren, also durch Wahl eines endlichen Teilraumes $S^h \subset H_0^1(\Omega)$ (vgl. [6, S. 153 f]). $u$ und $v$ gehen über zu $u^h, v^h \in S^h$. Somit gilt für die Diskretisierung

$$\int_\Omega \lambda(\vec{x})\, \nabla u^h(\vec{x}) \cdot \nabla v^h(\vec{x})\, d\Omega = \int_\Omega f(\vec{x})\, v^h(\vec{x})\, d\Omega \quad \forall v^h \in S^h \tag{2.15}$$

Mit einer Basis $\left\{\Phi_i | 1 \leq i \leq N\right\}$ von $S^h$ können $u^h$ und $v^h$ durch eine Linearkombination aus den Basisfunktionen $\Phi_i$ und den Koeffizienten $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ dargestellt werden:

$$u^h(\vec{x}) =: \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i(\vec{x}) \tag{2.16}$$

$$v^h(\vec{x}) =: \sum_{i=1}^N v_i \Phi_i(\vec{x}) \tag{2.17}$$

Um die hier verwendeten Basisfunktionen von denen der dünnen Gitter abzugrenzen, wird innerhalb dieser Arbeit im Kontext finiter Elemente von Ansatzfunktionen gesprochen. Setzt

man diese Definitionen in Gleichung 2.15 ein und vertauscht Summe und Integral, so gilt

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Omega} \lambda(\vec{x})\, \nabla\Phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla\Phi_j(\vec{x})\; d\Omega = \sum_{i=1}^{N} v_i \int_{\Omega} f(\vec{x})\Phi_i(\vec{x})\; d\Omega \tag{2.18}$$

Sind alle Summanden gleich, so impliziert dies die Gleichheit der Summe:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Omega} \lambda(\vec{x})\, \nabla\Phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla\Phi_j(\vec{x})\; d\Omega = \int_{\Omega} f(\vec{x})\, \Phi_i(\vec{x})\; d\Omega \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \tag{2.19}$$

Definiert man eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sowie einen Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^N$ zu

$$A_{i,j} := \int_{\Omega} \lambda(\vec{x})\, \nabla\Phi_i(\vec{x}) \cdot \nabla\Phi_j(\vec{x})\; d\Omega \tag{2.20}$$

$$f_i := \int_{\Omega} f(\vec{x})\, \Phi_i(\vec{x})\; d\Omega \tag{2.21}$$

und fasst die Koeffizienten $u_i$ als Komponenten des Vektors $\vec{u} \in \mathbb{R}^N$ auf, so lässt sich das entstandene lineare Gleichungssystem durch folgende Gleichung darstellen:

$$A\vec{u} = \vec{f} \tag{2.22}$$

Die Matrix $A$ wird Steifigkeitsmatrix genannt.

Die Methode der finiten Elemente bietet eine Möglichkeit zur Wahl der Basis. Im folgenden soll knapp erklärt werden, wie aus $A$ die lokalen Steifigkeitsmatrizen $A^k$ hervorgehen. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [6, S. 175ff] verwiesen.

Beschränkt man die Wahl der finiten Elemente auf Lagrangeelemente, so gilt für die Basisfunktionen $\Phi_i$ mit den Gitterpunkten $\vec{x}_j$

$$\Phi_i(\vec{x_j}) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, N\} \tag{2.23}$$

mit dem Kronecker Delta

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.24}$$

Die dazwischenliegenden Funktionswerte werden stückweise polynomiell interpoliert.

Ist $g_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ Abbildung, welche den für das $k$-te Element lokalen Gitterpunktindizes die globalen zuordnet, so definiert man die Matrizen $A^k \in \mathbb{R}^{d^2\times d^2}$ definieren:

$$A^k_{i,j} := \int_{G^k} \lambda(\vec{x})\, \nabla\Phi_{g_k(i)}(\vec{x}) \cdot \nabla\Phi_{g_k(j)}(\vec{x})\; d\Omega \tag{2.25}$$

Die Komponenten der Steifigkeitsmatrix $A$ können als Summe ausgewählter Komponenten aller $A^k$ zusammensetzt werden. Die Matrizen $A^k$ werden lokale Steifigkeitsmatrizen genannt. Die Berechnung ihrer Komponenten erfordert die Integration über das Gebiet des finiten Elementes $G_k$. Da hierfür in vielen Fällen die analytische Lösung nicht oder nur unter erheblichem Aufwand bestimmt werden kann, sollen die Integrale numerisch approximiert werden.

## 2.3 Numerische Integration

In ihrer allgemeinen Form approximiert die numerische Integration, die auch Quadratur genannt wird, das zu lösende Integral durch eine endliche Summe gewichteter Funktionsauswertungen des Integranden:

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})\ d\Omega = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(\vec{\xi_i})\ +\ R \tag{2.26}$$

Hierbei ist $f : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ ein beliebiges Skalarfeld und $R$ der Appxoimationsfehler. Die Wahl eines speziellen Verfahrens bestimmt die Koeffizienten $\alpha_i$ und die Integrationsstützpunkte $\xi_i$. Oft werden die Paramter so gewählt, dass Polynome eines bestimmten Maximalgrades exakt integriert werden können. Ein Beispiel hierfür ist die Gauß-Quadratur, welche in [7, S. 137ff] hergeleitet wird. Derartige Verfahren sind für die Berechnung lokaler Steifigkeitsmatrizen dann nicht optimal, wenn die Integranden keine polynomielle Eigenschaft aufweisen. Für Gleichung 2.13 wäre ein Wärmeleitkoeffizient $\lambda$ mit Sprungstelle als Modell für die Fügung zweier Materialien denkbar.

Im Rahmen dieser Arbeit soll $f$ durch eine $d$-lineare Interpolierende $\widetilde{f} : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ approximiert werden. Mit dem Fehlerterm

$$r(\vec{x}) := f(\vec{x}) - \widetilde{f}(\vec{x}) \tag{2.27}$$

lässt sich das Integral über $\Omega$ exakt darstellen. Es gilt:

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})\ d\Omega = \int_{\Omega} \widetilde{f}(\vec{x})\ d\Omega + \int_{\Omega} r(\vec{x})\ d\Omega \tag{2.28}$$

Dabei kann Der Quadraturfehler

$$R_Q := \int_{\Omega} r(\vec{x})\ d\Omega \tag{2.29}$$

betragsmäßig durch $||r||_{L^2}$ abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
|R_Q| &= \Big| \int_\Omega r(\vec{x})\, d\Omega \Big| & \Big|^2 \\
|R_Q|^2 &= \Big| \int_\Omega r(\vec{x})\, d\Omega \Big|^2 \;\leq\; \int_\Omega |r(\vec{x})|^2\, d\Omega & \Big|\sqrt{\phantom{x}} \\
|R_Q| &\leq \sqrt{\int_\Omega r(\vec{x})^2\, d\Omega} \;=\; ||r||_{L^2} & (2.30)
\end{aligned}
$$

## 2.4 Basisdarstellung von Funktionen

Sei $\widetilde{f}$ ein Element eines Funktionenraumes $X$ der Mächtigkeit $|X|$ und findet man für selbigen eine Basis $\{\ \phi_i \mid 1 \leq i \leq |X|\ \}$, so kann man $\widetilde{f}$ als Linearkombination aus den Basisfunktionen mit den Koeffizienten $\omega_i$ darstellen:

$$\widetilde{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{|X|} \omega_i \phi_i(\vec{x}) \tag{2.31}$$

Für die Integration über das Gebiet $\Omega$ ergibt sich daraus folgende Beziehung:

$$\int_\Omega \widetilde{f}(\vec{x})\, d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^{|X|} \omega_i \phi_i(\vec{x})\, d\Omega \tag{2.32}$$

Ist die Basis wie im Falle numerischer Integration endlich, so wird aus der Reihe eine endliche Summe. Da diese absolut konvergent ist, können Integration und Summation vertauscht werden

$$\int_\Omega \widetilde{f}(\vec{x})\, d\Omega = \sum_{i=1}^{|X|} \omega_i \int_\Omega \phi_i(\vec{x})\, d\Omega \tag{2.33}$$

Die Approximation des Integrals ergibt sich nach Gleichung 2.28 und Gleichung 2.29 zu

$$\int_\Omega f(\vec{x})\, d\Omega = \sum_{i=1}^{|X|} \omega_i \int_\Omega \phi_i(\vec{x})\, d\Omega \;+\; R_Q \tag{2.34}$$

In der allgemeinen Form numerischer Integration nach Gleichung 2.26, erkennt man eine Konstante $\alpha_i$ und die Funktionsauswertung $f(\xi_i)$. Gleichung 2.34 enthält derartige Terme ebenfalls: Das Integral wie auch $\alpha_i$ sind ortsunanabhägig und $\omega_i$ entsteht für die verwendeten Interpolierenden durch Funktionsauswertungen des Integranden an bestimmen Sützstellen.

Im Folgenden wird mittels dünner Gitter nach [1, S. 9ff] eine an die Anforderungen aus Abschnitt 1 angepasste Basis hergeleitet. Eine weitere Herleitung dünner Gitter für ein und zwei Dimensionen findet sich in [3]. In Erweiterung dazu wird statt dem $d$-dimensionalen Einheitsintervall $[0,\ 1]^d$ das allgemeine rechtwinklinge geschlossene Gebiet

$$\overline{\Omega} := \prod_{k=1}^{d} [a_k,\, b_k] \tag{2.35}$$

betrachtet. Mit der Transformation

$$z_k := \frac{x_k - a_k}{b_k - a_k} \tag{2.36}$$

erhält man die in den Referenzen beschriebenen Basen in Termen von $\vec{z}$. Die dort getroffenen Abschätzungen ändern sich gegebenenfalls um einen Faktor

$$Vol(\overline{\Omega}) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) \tag{2.37}$$

**Knotenbasen:** Für den Raum der auf dem Intervall $[a,\, b]$ stückweise stetigen Funktionen mit $2^L - 1$ äquidistanten Gitterpunkten im Inneren des Intervalls und Wert 0 auf dem Rand $V_L$ existiert eine sog. Knotenbasis. Sie soll als einführendes Beispiel dienen:

Ausgehend von der eindimensionalen Funktion $\phi \in H_0^1([a,\, b])$

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.38}$$

definiert man die Basisfunktionen der Knotenbasis $\{\ \phi_i \mid 1 \leq i \leq 2^L - 1\ \}$ durch

$$\phi_i(x) := \phi\Big(\ \frac{x-a}{b-a} \cdot 2^L - i\ \Big) \tag{2.39}$$

Der Raum $V_L$ wird durch seine Basisfunktionen aufgespannt:

$$V_L = span\{\ \phi_i \mid 1 \leq i \leq 2^L - 1\ \} \tag{2.40}$$

Mit dem Knotenabstand

$$h_L := (b - a) \cdot 2^{-L} \tag{2.41}$$

und den $2^L - 1$ Gitterpunkten

$$x_i := a + i h_L \tag{2.42}$$

ergibt sich der zur Basisfunktion $\phi_i$ gehörende Träger zu

$$supp(\phi_i) = [x_i - h_L,\ x_i + h_L] \tag{2.43}$$

Abbildung 2.1 zeigt die Knotenbasis des Raumes $V_3$.

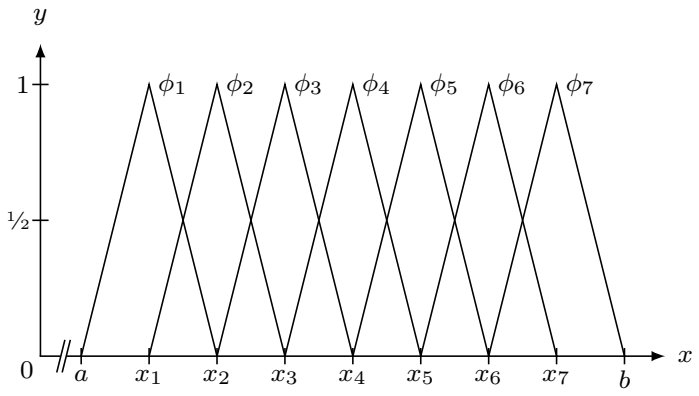



**Abbildung 2.1:** Knotenbasis des Raumes $V_3$

Das Integral der $i$-ten Basisfunktionen über das Intervall $[a,\ b]$ ist durch

$$\int_a^b \phi_i(x)\ dx = \int_{x_i-h_L}^{x_i+h_L} \phi_i(x)\ dx = h_L = \frac{1}{2} \cdot Vol(supp(\phi_i)) \tag{2.44}$$

gegeben. Die entspricht dem halben Volumen des Trägers der Basisfunktion. Der Wert ist unabhängig von $i$ und somit für alle Basisfunktionen $\phi_i$ identisch.

Approximiert man eine Funktion $f$ durch die Interpolierende

$$\widetilde{f}(x) := \sum_{i=1}^{2^L-1} f(x_i)\phi_i(x) \tag{2.45}$$

aus dem Raum $V_L$ unter Verwendung der Gewichte $\omega_i := f(x_i)$, so ergibt sich das Integral nach Gleichung 2.34 zu

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{2^L-1} f(x_i) \int_a^b \phi_i(x)\ dx\ +\ R_Q = h_L \sum_{i=1}^{2^L-1} f(x_i)\ +\ R_Q \tag{2.46}$$

**Hierarchische Basen:** Hierarchische Basen nach [1] bilden eine Alternative zu Knotenbasen. Sie beruhen auf einer Zerlegung des Raumes $V_L$ in $L$ Teilräume $W_l$, die in der Referenz auch hierarchische Inkremente genannt werden.

$$V_L =: \bigoplus_{l=1}^{L} W_l \tag{2.47}$$

Mit den Indizes $i$ aus der Indexmenge

$$I_l := \{\ i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 2^L - 1,\ i \text{ ungerade}\ \} \tag{2.48}$$

$$x_{l,i} := a + ih_l \tag{2.49}$$

ergeben sich die Basisfunktionen des $l$-ten Teilraumes zu

$$\phi_{l,i} := \phi\Big( \frac{x-a}{b-a} \cdot 2^l - i \Big) \tag{2.50}$$

Ihr Träger ist durch

$$supp(\phi_{l,i}) = \Big[ x_{l,i} - h_l,\ x_{l,i} + h_l \Big] \tag{2.51}$$

gegeben.

Integriert man sie über das Intervall $[a,\ b]$, erhält man, wie bei der Knotenbasis, den Gitterpunktabstand, was dem halben Trägervolumen entspricht:

$$\int_a^b \phi_{l,i}(x)\ dx = \int_{x_{l,i}-h_l}^{x_{l,i}+h_l} \phi_{l,i}(x)\ dx = h_l = \frac{1}{2} \cdot Vol(supp(\phi_{l,i})) \tag{2.52}$$

Der Teilraum $W_l$ ist die lineare Hülle seiner Basisfunktionen:

$$W_l = span\{\ \phi_{l,i} \mid i \in I_l\ \} \tag{2.53}$$

Abbildung 2.2 zeigt die hierarchische Basis des Raumes $V_3$.

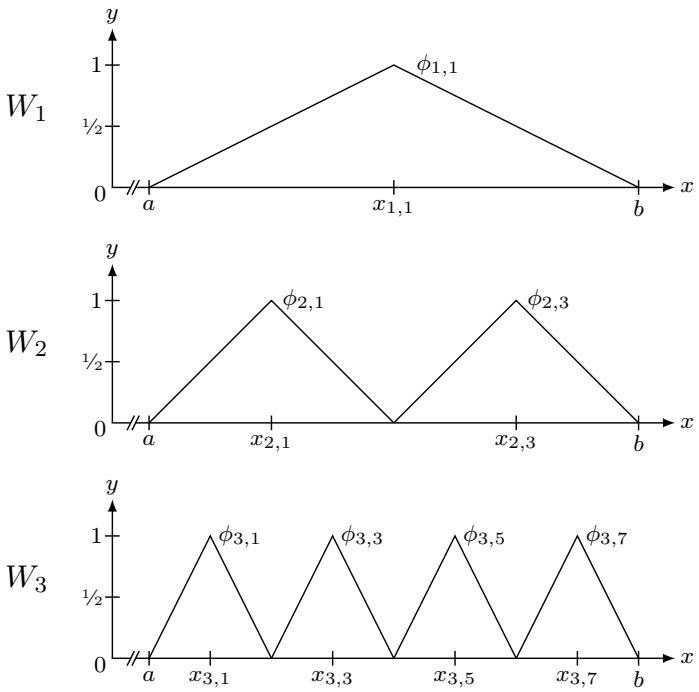



**Abbildung 2.2:** Hierarchische Basis des Raumes $V_3$

Stellt man die Interpolierende $\widetilde{f}$ von $f : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}$ in $V_L$ durch die hierarchische Basis dar, so ergibt sich folgende Form:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_l} \omega_{l,i}\, \phi_{l,i}(x) \tag{2.54}$$

Die Gewichte $\omega_{l,i}$ heißen hierarchische Überschüsse. Sie bestimmen sich nach [1, S. 13] zu

$$\omega_{l,i} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f(x_{l,i}) = -\frac{1}{2} f(x_{l,i} - h_l) + f(x_{l,i}) - \frac{1}{2} f(x_{l,i} + h_l) \tag{2.55}$$

Hierbei ist $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ein eindimensionaler Differenzenstern (engl. *Stencil*) nach [8, S. 48] mit Gitterweite $h_l$.

Wie Abbildung 2.3 verdeutlicht, sind die hierarchischen Überschüsse der Abstand zwischen der Interpolierenden in $V_{L-1}$ und dem Funktionswert am jeweiligen Gitterpunkt. Die Interpolierende von $V_0$ ist für hierarchische Basen ohne Randwertbehandlung identisch null auf dem gesamten Intervall $[a,\, b]$.

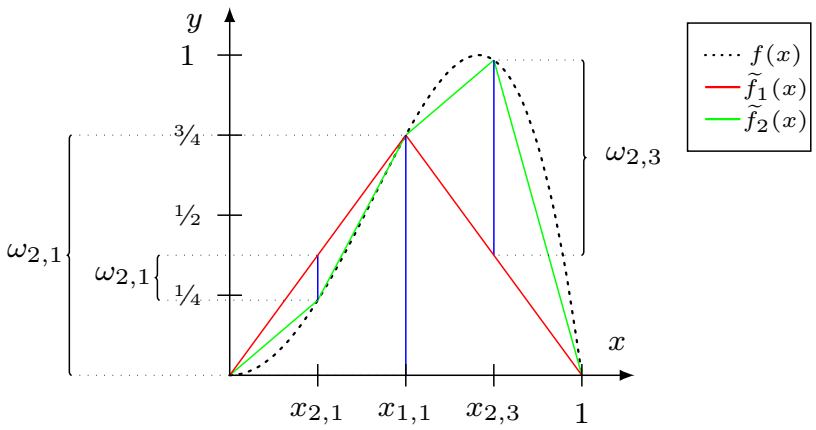



**Abbildung 2.3:** Graphen der Interpolierenden $\widetilde{f}_1 \in V_1$ (rot) und $\widetilde{f}_2 \in V_2$ (grün) der Funktion $f(x) := 4 \cdot x^2 \cdot (1 - x^2)$ sowie eine Darstellung der zugehörigen hierarchischen Überschüsse (blau)

**Erweiterung auf mehrdimensionale Funktionen:** Will man eine Interpolierende für eine mehrdimensionale Funktion $f : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ bestimmen, so ist - unter der Voraussetzung, dass $\overline{\Omega}$ rechtwinklig ist - die Verwendung des Tensorproduktes ein möglicher Ansatz. Verallgemeinert bezeichnet $V_L$ dann den Raum der stückweise $d$-linearen Funktionen, die auf dem Rand $\partial\Omega := \overline{\Omega} \backslash \Omega$ verschwinden. Für die Stufe $\underline{l} \in \mathbb{N}^d$ gilt $||\underline{l}||_\infty \leq L$. Der Raum $V_L$ setzt sich wie im eindimensionalen Fall als direkte Summe der verallgemeinerten hierarchischen Inkremente $W_{\underline{l}}$ zusammen:

$$V_L =: \bigoplus_{\substack{\underline{l} \in \mathbb{N}^d \\ ||\underline{l}||_\infty \leq L}} W_{\underline{l}} \tag{2.56}$$

Die Knotenabstände sind durch

$$\vec{h}_{\underline{l}} := (\vec{b} - \vec{a}) \cdot 2^{-\underline{l}} \tag{2.57}$$

gegeben, die Gitterpunkte befinden sich an den Stellen

$$\vec{x}_{\underline{l},\underline{i}} := \vec{a} + \underline{i} \cdot \vec{h}_{\underline{l}} \tag{2.58}$$

Mit den Indizes $\underline{i}$ der Indexmenge

$$I_{\underline{l}} := \left\{ \underline{i} \in \mathbb{N}^d \mid \underline{1} \leq \underline{i} \leq 2^{\underline{l}} - \underline{1},\ i_k \text{ ungerade } \ \forall k \in \{1, \ldots, d\} \right\} \tag{2.59}$$

berechnen sich die Basisfunktionen des Teilraumes $W_{\underline{l}}$ zu

$$\phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x}) := \prod_{k=1}^{d} \phi_{l_k,i_k}(x_k) \tag{2.60}$$

Ihr Träger ist das Tensorprodukt der eindimensionalen Träger:

$$supp(\phi_{\underline{l},\underline{i}}) = \prod_{k=1}^{d} supp(\phi_{l_k,i_k}) = \prod_{k=1}^{d} \left[ x_{\underline{l},\underline{i},k} - h_l,\ x_{\underline{l},\underline{i},k} + h_l \right] \tag{2.61}$$

Für die Integrale der Basisfunktionen über $\Omega$ gilt

$$\int_{\Omega} \phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x})\ d\Omega = \int_{\Omega} \prod_{k=1}^{d} \phi_{l_k,i_k}(x_k)\ d\Omega = \prod_{k=1}^{d} \int_{a_k}^{b_k} \phi_{l_k,i_k}(x)\ dx = \prod_{k=1}^{d} h_{l_l} = 2^{-||\underline{l}||_1} \cdot Vol(\overline{\Omega}) \tag{2.62}$$

Integration und Produkt können hierbei vertauscht werden, weil die eindimensionalen Basisfunktionen nur von ihrer jeweiligen Koordinate $x_k$ abhängen. Eine alternative Darstellungsmöglichkeit des Integralwertes ergibt sich - wie zuvor - aus dem Volumen des Trägers:

$$\int_{\Omega} \phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x})\ d\Omega = 2^{-d} \cdot Vol(supp(\phi_{\underline{l},\underline{i}})) \tag{2.63}$$

Abbildung 2.4 zeigt die hierarchische Basis des Raumes $V_3$ für $\overline{\Omega} := [0,\ 1]^2$.

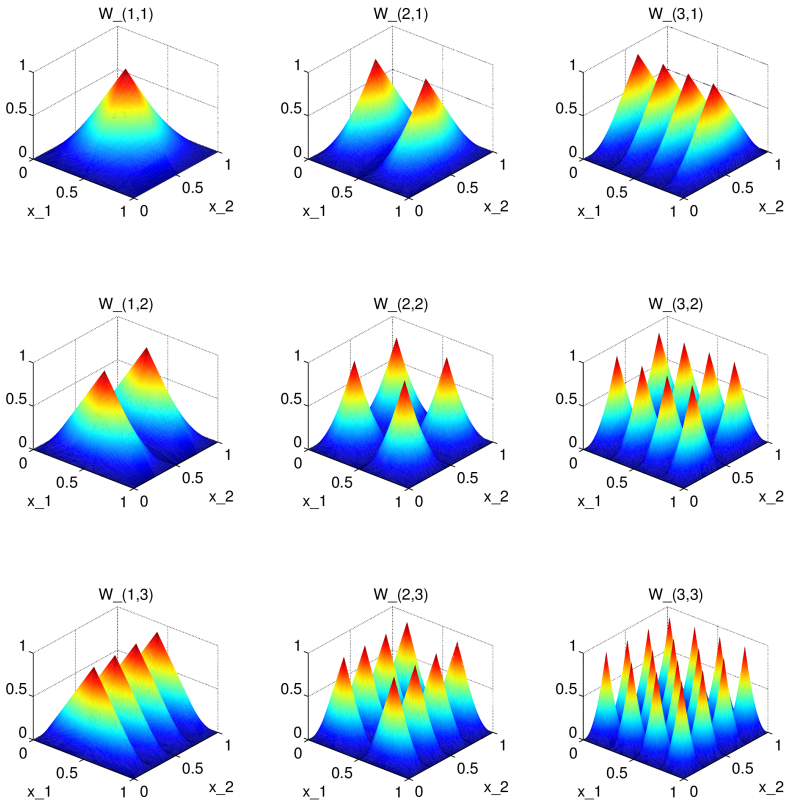



**Abbildung 2.4:** Hierarchische Basis des Raumes $V_3$ für $\overline{\Omega} := [0,\, 1]^2$

Die Auswertung des $d$-dimensionalen hierarchischen Überschüsse $\omega_{l,i}$ geschieht durch Verallgemeinerung des *Stencils*:

$$\omega_{\underline{l},\underline{i}} := \left[ -\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \right]^d f(\vec{x}_{\underline{l},\underline{i}}) \tag{2.64}$$

Für die Interpolierende $\widetilde{f}$ von $f$ in $V_L$ ergibt sich folgende Darstellung:

$$\widetilde{f}(\vec{x}) := \sum_{||\underline{l}||_\infty \leq L} \sum_{\underline{i} \in I_{\underline{l}}} \omega_{\underline{l},\underline{i}}\ \phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x}) \tag{2.65}$$

Da durch den Produktansatz gemäß Gleichung 2.60 jede Kombination aus Basisfunktionen in $d$ Dimensionen erzeugt wird, beträgt die Anzahl der Gitterpunkte $(2^L - 1)^d \in \mathcal{O}(2^{Ld})$.

Die Menge $\{\ \vec{x}_{\underline{l},\underline{i}} \mid ||\underline{l}||_\infty \leq L,\ \underline{i} \in I_{\underline{l}}\ \}$ wird volles Gitter der Stufe $L$ genannt.

## 2.5 Dünne Gitter

Dünne Gitter beruhen auf einer Kosten-Nutzen-Betrachtung: Es wird abgewägt, wie viel Beitrag das hierarchische Inkrement $W_{\underline{l}}$ zur Approximationsgüte in einer vorgebenen Norm leistet.

Wie in [1, 16ff] hergeleitet, setzt sich der für die $||\cdot||_{L^2}$-Norm optimale Raum $V_L^{(1)}$ wie folgt zusammen:

$$V_L^{(1)} = \bigoplus_{\substack{\underline{l}\in\mathbb{N}^d \\ ||\underline{l}||_1 \leq L+d-1}} W_{\underline{l}} \tag{2.66}$$

Zur besseren Unterscheidbarkeit, wird der Raum der vollen Gitter $V_L$ fortan als $V_L^{(\infty)}$ bezeichnet.

Abbildung 2.5 stellt die Teilräume $W_{\underline{l}}$ für $d = 2$ dar, aus denen der Räume $V_3^{(\infty)}$ und $V_3^{(1)}$ des vollen Gitters bzw. des dünnen Gitters der Stufe $L = 3$ zusammengesetzt sind.

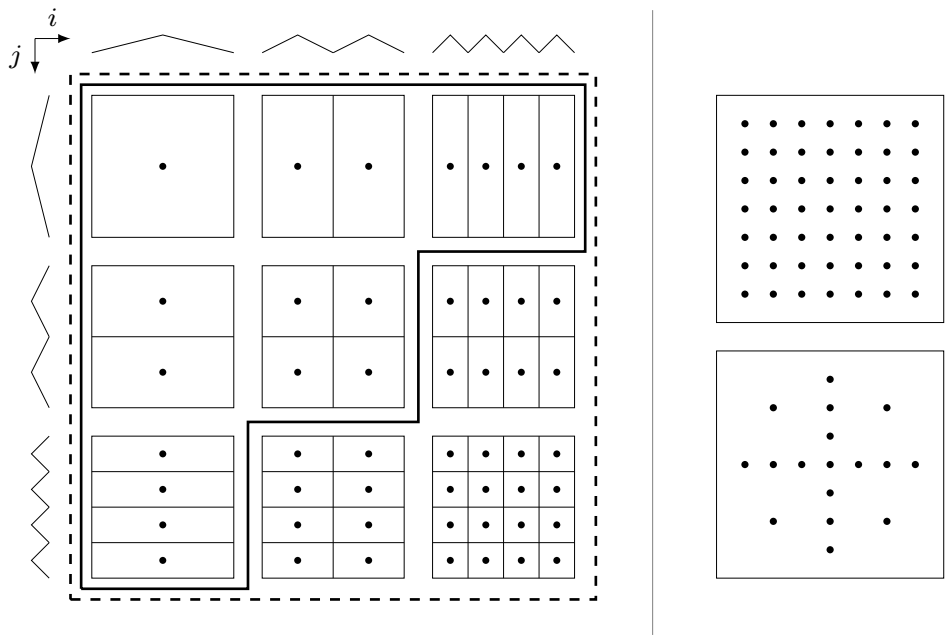



**Abbildung 2.5:** Links: Teilräume $W_{(i,j)}$. Die Räume innerhalb der gestrichelten Linie ergeben den Raum des vollen Gitters $V_3^{(\infty)}$, die innerhalb der durchgezogenen Linie den des dünnen Gitters $V_3^{(1)}$. Rechts oben: Volles Gitter. Rechts unten: Dünnes Gitter. Beide der Stufe $L = 3$ ohne Randwertbehandlung.

Der Kosten-Nutzen-Optimierung liegt die Forderung zu Grunde, dass $f$ im Raum $H^2(\overline{\Omega})$ liegt (vgl. [1, S. 15]). Funktionen dieser Klasse sollen im folgenden als hinreichend glatte Funktionen bezeichnet werden. Unter dieser Voraussetzung können nach [1, S. 17f] und [1, S. 28ff] obere Grenzen für die Anzahl der Gitterpunkte und den Interpolationsfehler $||f-\widetilde{f}||_{L^2}$ mit der jeweligen oben beschriebenen Interpolierenden $\widetilde{f}$ für volle bzw. dünne Gitter hergeleitet werden. Diese sind in Tabelle 2.1 dargestellt. Dabei ist

$$\widetilde{h}_L := 2^{-L} \tag{2.67}$$

der Knotenabstand voller Gitter aus dem Raum $V_L^{(\infty)}$ auf dem $d$-dimensionalen Einheitsintervall $[0,\, 1]^d$.

| $X$ | $\|X\|$ | $\|\|f - \widetilde{f}\|\|_{L^2},\ \widetilde{f} \in X$ |
|---|---|---|
| $V_L^{(\infty)}$ | $\mathcal{O}(\widetilde{h}_L^{-d})$ | $\mathcal{O}(\widetilde{h}_L^2)$ |
| $V_L^{(1)}$ | $\mathcal{O}(\widetilde{h}_L^{-1}\ log_2(\widetilde{h}_L^{-1})^{d-1})$ | $\mathcal{O}(\widetilde{h}_L^2\ log_2(\widetilde{h}_L^{-1})^{d-1})$ |

**Tabelle 2.1:** Vergleich der Räumen voller $V_L^{(\infty)}$ und dünner Gitter $V_L^{(1)}$ bezüglich Anzahl der Gitterpunkte und Interpolationsfehler in der $||\cdot||_{L^2}$-Norm

Der Vergleich dünner mit vollen Gittern zeigt eine Reduktion der Gitterpunkte auf Kosten eines zusätzlichen logarithmischen Terms im Interpolationsfehler.

Die Menge $\{\ \vec{x}_{\underline{l},\underline{i}} \mid ||\underline{l}||_1 \leq L + d - 1,\ \underline{i} \in I_{\underline{l}}\ \}$ wird als dünnes Gitter der Stufe $L$ bezeichnet.

## 2.6 Funktionen mit nicht verschwindendem Rand

Der Raum $V_L^{(1)}$ betrachtet nur Funktionen, die auf dem Rand $\partial\Omega$ von $\overline{\Omega}$ identisch null sind. In [2, S. 12ff] werden drei Möglichkeiten vorgeschlagen, diese Beschränkung aufzuheben. Die Wahl soll auf die erste Variante fallen. Der erzeugte Raum wird in der Referenz mit $V_L^{B(2)}$ bezeichnet.

Um die Randwerte auszuwerten wird die hierarchische Basis um eine Stufe $l = 0$ erweitert. Diese enthält die Basisfunktionen $\phi_{0,0},\ \phi_{0,1} : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$, welche durch

$$\phi_{0,0}(x) := \frac{x - b}{a - b} \tag{2.68}$$

$$\phi_{0,1}(x) := \frac{x - a}{b - a} \tag{2.69}$$

definiert sind.

Für die Stufe $l = 0$ definiert sich die Indexmenge zu

$$I_0 := \{0,\ 1\} \tag{2.70}$$

Abbildung 2.6 stellt ihre Funktionsgraphen dar.

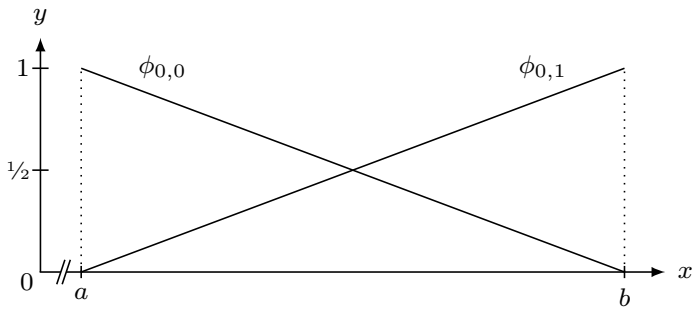



**Abbildung 2.6:** Graphen der Basisfunktionen $\phi_{0,0}$ und $\phi_{0,1}$ für die Randwertbehandlung.

Die Integrale der Basisfunktionen ergeben sich zu

$$\int_a^b \phi_{0,0}(x)\ dx = \int_a^b \phi_{0,1}(x)\ dx = \frac{h_0}{2} = \frac{b-a}{2} \tag{2.71}$$

Die Gitterpunkte liegen auf dem jeweiligen Rand der Intervalles $[a,\, b]$:

$$x_{0,0} := a \tag{2.72}$$
$$x_{0,1} := b \tag{2.73}$$

Die Randwerte dienen als Gewichte:

$$\omega_{0,0} = f(a) \tag{2.74}$$
$$\omega_{0,1} = f(b) \tag{2.75}$$

Die Konstruktion der mehrdimensionalen Basis erfolgt wie zuvor durch die Verwendung des Tensorproduktes. Dabei enthält der *Stencil* für den hierarchischen Überschuss in allen Dimensionen, in denen eine Basisfunktion der Stufe $l = 0$ auftritt, nur den mittleren Eintrag. Der Raum $V_L^{(1,R)}$ der dünnen Gitter mit Rand und Stufe $L$ auf $\overline{\Omega}$ ergibt sich wieder durch eine direkte Summe der hierarchischen Inkremente, wobei für $\underline{l}$ nun auch Komponenten mit Wert 0 zugelassen sind:

$$V_L^{(1,R)} := \bigoplus_{\substack{\underline{l} \in \mathbb{N}_0^d \\ ||\underline{l}||_1 \leq L+d-1}} W_{\underline{l}} \tag{2.76}$$

Analog dazu kann der Raum der vollen Gitter zu $V_L^{(\infty,R)}$ erweitert werden:

$$V_L^{(\infty,R)} := \bigoplus_{\substack{\underline{l} \in \mathbb{N}_0^d \\ ||\underline{l}||_\infty \leq L}} W_{\underline{l}} \tag{2.77}$$

Abbildung 2.7 zeigt die Teilräume $W_{\underline{l}}$ von $V_3^{(1,R)}$ und $V_3^{(\infty,R)}$ und die daraus resultierenden Gitter.

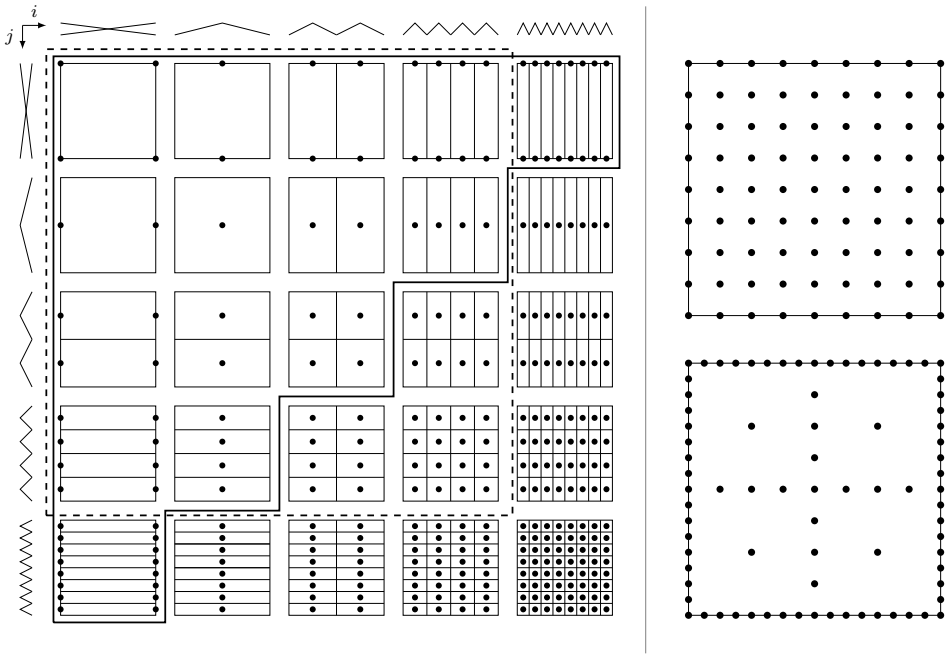



**Abbildung 2.7:** Links: Teilräume $W_{(i,j)}$. Die Räume innerhalb der gestrichelten Linie ergeben den Raum des vollen Gitters $V_3^{(\infty.R)}$, die innerhalb der durchgezogenen Linie den Raum des dünnen Gitters $V_3^{(1,R)}$. Rechts oben: Volles Gitter. Rechts unten: Dünnes Gitter. Beide der Stufe $L = 3$ mit Randwertbehandlung.

## 2.7 Adaptive Verfeinerung

Wie Abbildung 2.7 verdeutlicht, sind die Gitterpunkte und damit die Basisfunktionen innerhalb dünner Gitter ungleichmäßig verteilt. Je dichter sie in einem Teilgebiet von $\overline{\Omega}$ liegen, desto genauer können dort gekrümmte Funktionen approximiert werden. In Teilgebieten mit wenig Gitterpunkten, kann die Interpolierende $\widetilde{f}$ die Eigenschaften der ursprünglichen Funktion gegebenenfalls nur ungenau wiedergeben. Da für die betrachteten Integranden keine weiteren Einschränkungen gelten sollen, können diese auch Singularitäten und andere Unstetigkeiten enthalten. Um diese Stellen gut approximieren zu können, bedarf es dort einer hohen Anzahl von Gitterpunkten. Die oben eingeführten dünnen Gitter entsprechen dieser Anforderung nicht immer, weshalb eine adaptive Verfeinerung anhand eines lokalen Kriteriums zum Einsatz kommen soll. Wie in [3, S. 248] beschrieben, können dünne Gitter als Graph dargestellt werden. Hierbei ist jede Basisfunktion ein Knoten, der zu jeder Basisfunktionen der nächst höheren Stufe eine Kante enthält, wenn die Schnittmenge der beiden Träger nicht leer ist.

Die Menge aller Knoten ist durch

$$V := \left\{ \phi_{\underline{l},\underline{i}} \in H^1(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \underline{l} \in \mathbb{N}_0^d,\, \underline{i} \in I_{\underline{l}} \right\} \tag{2.78}$$

gegeben. Mit dem Multiindex $\underline{\delta}_k \in \mathbb{N}_0^d$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \tag{2.79}$$

dessen Komponenten durch Kronecker Deltas gebildet werden und der Menge der Nachfolgeindizes $\hat{\underline{i}}$ der nächsten Stufe $\hat{\underline{l}} := \underline{l} + \underline{\delta}_k$ von $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ für die Verfeinerung der $k$-ten Dimension

$$N_{\underline{l},\underline{i},k} := \left\{ \hat{\underline{i}} \in I_{\underline{l}} \;\middle|\; (\hat{i}_j = 2i_j \pm 1) \wedge (j = k) \;\vee\; (\hat{i}_j = i_j) \wedge (j \neq k) \quad \forall j \in \{1, \ldots, d\} \right\} \tag{2.80}$$

ergibt sich die Menge der von $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ weggerichteten Kanten der Dimension $k$ zu

$$E_{\underline{l},\underline{i},k} := \begin{cases} \left\{ (\phi_{\underline{l},\underline{i}}, \phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}}) \in V \times V \;\middle|\; (\hat{\underline{l}} = \underline{l} + \underline{\delta}_k) \wedge (\hat{\underline{i}} \in N_{\underline{l},\underline{i},k}) \right\} & l_k > 0 \\ \emptyset & l_k = 0 \end{cases} \tag{2.81}$$

Vereinigt man diese Menge für alle Dimensionen, so erhält man die Menge aller von $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ weggerichteten Kanten:

$$E_{\underline{l},\underline{i}} := \bigcup_{k=1}^{d} E_{\underline{l},\underline{i},k} \tag{2.82}$$

Die Menger aller Kanten $E$ des Graphen $(V, E)$ wird als Vereinigung von $E_{\underline{l},\underline{i}}$ für alle Basisfunktionen definiert:

$$E := \bigcup_{\underline{l} \in \mathbb{N}_0^d} \bigcup_{\underline{i} \in I_{\underline{l}}} E_{\underline{l},\underline{i}} \tag{2.83}$$

Der Graph ist gerichtet und azyklisch (engl. *directed acyclic graph, DAG*). Außerdem ist er aufgrund der Randwertbehandlung nicht zusammenhängend. In Abbildung 2.8 ist der Graph eines zweidimensionalen klassischen dünnen Gitters der Stufe $L = 2$ dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Teilgraphen der Randwertbehandlung nicht eingezeichnet. Für die Basisfunktionen der Eckpunkte, also derer mit Stufe $\underline{l} = \underline{0}$, existieren $2^d$ Knoten, von welchen keine Kanten ausgehen. Die Basisfunktionen der übrigen Randpunkte mit Stufe $0 < ||\underline{l}||_1 < d$ sind die Wurzeln azyklischer Teilgraphen. Sie sind mit den anderen Teilgraphen paarweise nicht zusammenhängend.

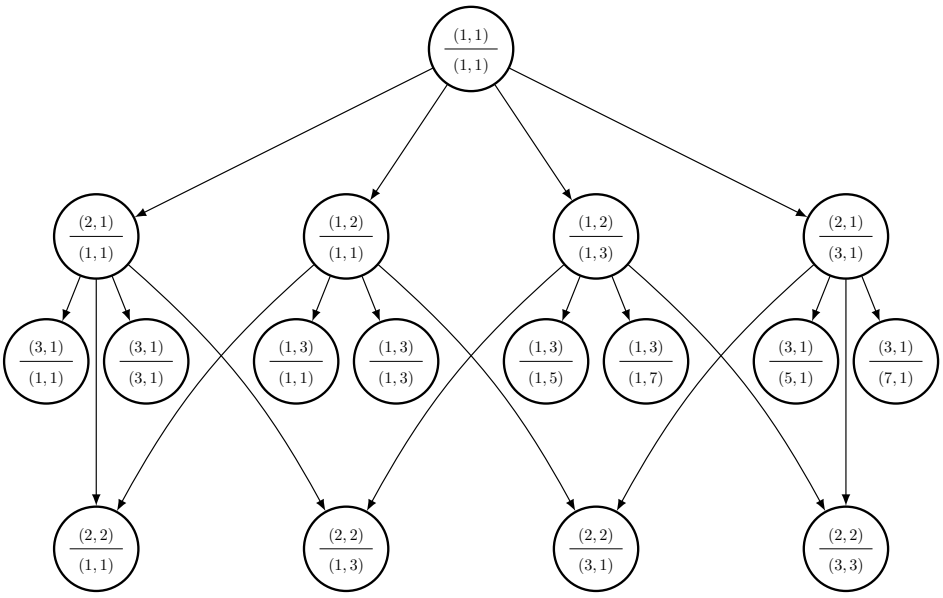



**Abbildung 2.8:** Graph $(V, E)$ eines zweidimensionalen klassischen dünnen Gitters ohne Randbehandlung. Der obere Multiindex in den Knoten entspricht der Stufe $\underline{l}$ der zugehörigen Basisfunktion, der untere ihrem Index $\underline{i}$.

Im Folgenden soll der Graph $(V, E)$ zur Vereinfachung der Traversierung in einen Wald überführt werden und ein Verfeinerungsprädikat $P^V_{\underline{l},\underline{i}}$ gefunden werden, um die traversierte Teilmenge von $V$, also die ausgewerteten Basisfunktionen, endlich zu machen.
Ersteres gelingt, indem man zunächst mittels der Abbildung $W : E \mapsto \{1, \ldots, d\}$ jeder Kante ein Gewicht zuordnet. Dieses entspricht der Dimension $k$, in welcher verfeinert wird:

$$W((\phi_{\underline{l},\underline{i}}, \phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}})) := k \quad \text{für} \quad \hat{l}_k = l_k + 1 \tag{2.84}$$

Der Wald entsteht dann dadurch, dass man ein monoton fallendes Kantengewicht entlang der Pfade von den Wurzeln zu ihren Blättern fordert. Durch Selektion ergibt sich die Menge der Kanten die - ausgehend von der Basisfunktion $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ - diese Forderung erfüllen zu

$$E^W_{\underline{l},\underline{i},k} := \left\{ (\phi_{\widetilde{\underline{l}},\widetilde{\underline{i}}}, \phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}}) \in E_{\underline{l},\underline{i},k} \;\middle|\; (\widetilde{\underline{l}} = \underline{l}) \wedge (\widetilde{\underline{i}} = \underline{i}) \wedge (W((\phi_{\widetilde{\underline{l}},\widetilde{\underline{i}}}, \phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}})) \leq k) \right\} \tag{2.85}$$

Da kein a-priori Wissen über die Integranden vorhanden ist, soll - wie in [3, S. 248] vorgeschlagen - der Betrag des hierarchischen Überschusses als erstes lokales Verfeinerungskriterium für das Verfeinerungsprädikat $P^V_{\underline{l},\underline{i}}$ dienen. Er wird durch $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beschränkt:

$$P^{V,1}_{\underline{l},\underline{i}} := (|\omega_{\underline{l},\underline{i}}| > \varepsilon) \tag{2.86}$$

Da es Funktionen gibt, für die der hierarchische Überschuss mit steigender Stufe $\underline{l}$ nicht gegen 0 konvergiert, wird eine maximale Stufe $L_{max} \in \mathbb{N}_0$ als zweites Kriterium einführt. So werden, auch wenn $P^{V,1}_{\underline{l},\underline{i}}$ wahr ist, keine weiteren Basisfunktionen erzeugt, wenn die Aussage

$$P^{V,2}_{\underline{l},\underline{i}} := (||\underline{l}||_1 \leq L_{max} + d - 1) \tag{2.87}$$

falsch ist. Als Beispiel dient die Funktion $f_{L_{max}} : [0,\, 1] \mapsto \mathbb{R}$

$$f_{L_{max}}(x) := \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.88}$$

Für sie ist die Wertemenge der hierarchischen Überschüsse durch $\left\{ -\frac{1}{2},\, 0,\, +\frac{1}{2} \right\}$ gegeben. Setzt man $\varepsilon$ auf einen Wert kleiner als $\frac{1}{2}$, so werden ohne das zweite Kriterium unendliche viele Basisfunktionen in der Nähe der Sprungstelle erzeugt.

Eine weitere Problemquelle sind Funktionen, für die der hierarchische Überschuss klein ist, obwohl noch ein großer Restfehler vorhanden ist. Wertet man beispielsweise für die Funktion $f_{L_{min}} : [-1,\, +1] \mapsto \mathbb{R}$

$$f_{L_{min}}(x) := sin(\pi x)^2 \tag{2.89}$$

den hierarchischen Überschuss der ersten inneren Basisfunktion aus, so ergibt sich

$$\omega_{(1),(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f_{L_{min}}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = 0 \tag{2.90}$$

Das lokale Kriterium $P^{V,1}_{(1),(1)}$ ist für diesen hierarchischen Überschuss nicht erfüllt und das Gitter wird nicht weiter verfeinert. Für die Basisfunktionen der nächsten Stufe ergeben sich

allerdings Werte ungleich 0 und damit gegebenenfalls betragsmäßig größer als $\varepsilon$.

Um derartige Situationen zu vermeiden, wird als drittes Kriterium für das Verfeinerungsprädikat eine Mindeststufe $L_{min} \in \mathbb{N}_0$ eingeführt. Gilt

$$P_{\underline{l},\underline{i}}^{V,3} := (||\underline{l}||_1 < L_{min} + d - 1) \tag{2.91}$$

wird die Basisfunktion $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ verfeinert, auch wenn der Betrag des hierarchischen Überschusses kleiner als $\varepsilon$ ist.

Das Verfeinerungsprädikat ist durch drei Kriterien als

$$P_{\underline{l},\underline{i}}^{V} := (P_{\underline{l},\underline{i}}^{V,1} \vee P_{\underline{l},\underline{i}}^{V,3}) \ \wedge \ P_{\underline{l},\underline{i}}^{V,2} \tag{2.92}$$

defininiert. Für $L_{min} = L_{max}$ ergibt sich ein klassisches dünnes Gitter.

Beschränkt man die Menge der Kanten durch das monoton fallende Kantengewicht und das Verfeinerungsprädikat, so ergibt sich das Pendant zu $E_{\underline{l},\underline{i},k}$ zu

$$E_{\underline{l},\underline{i},k}^{*} := \begin{cases} E_{\underline{l},\underline{i},k}^{W} & P_{\underline{l},\underline{i}}^{V} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.93}$$

Die Definition aller Kanten des Waldes $(V, E^*)$ erfolgt analog zum oben hergeleiteten Graphen $(V, E)$:

$$E_{\underline{l},\underline{i}}^{*} := \bigcup_{k=1}^{d} E_{\underline{l},\underline{i},k}^{*} \tag{2.94}$$

$$E^{*} := \bigcup_{\underline{l} \in \mathbb{N}_0^d} \bigcup_{\underline{i} \in I_{\underline{l}}} E_{\underline{l},\underline{i}}^{*} \tag{2.95}$$

Abbildung 2.9 zeigt die nach obigen Regeln zu entfernenden Kanten, um aus dem Graphen des zweidimensionalen dünnen Gitters ohne Randwertbehandlung aus Abbildung 2.8 einen Wald zu gewinnen.

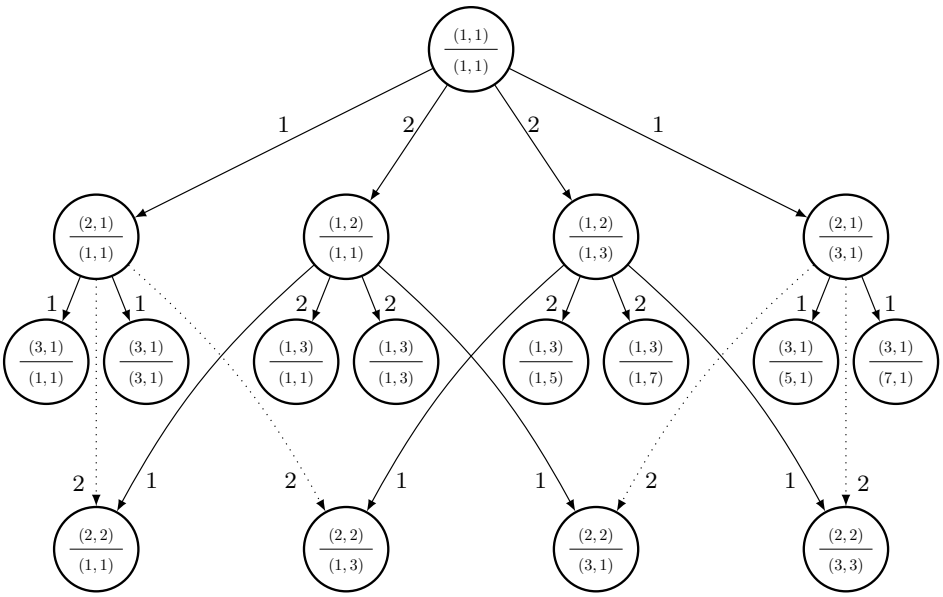



**Abbildung 2.9:** Graph $(V, E)$ eines zweidimensionalen klassischen dünnen Gitters ohne Randbehandlung. Der obere Multiindex in den Knoten entspricht der Stufe $\underline{l}$ der zugehörigen Basisfunktion, der untere ihrem Index $\underline{i}$. Die Kantengewichte geben die verfeinerte Dimension an. Entfernt man die gestrichelten Kanten, erhält man den Wald $(V, E^*)$.

Die zu traversierenden Bäume von $(V, E^*)$ besitzen die Wurzeln

$$B_1 := \left\{ \phi_{\underline{l},\underline{i}} \in V \mid \underline{l} \in \mathbb{N}_0^d,\ \underline{l} = \underline{0},\ \underline{i} \in I_{\underline{l}} \right\} \tag{2.96}$$

$$B_2 := \left\{ \phi_{\underline{l},\underline{i}} \in V \mid \underline{l} \in \mathbb{N}_0^d,\ 0 < ||\underline{l}||_1 < d,\ \underline{i} \in I_{\underline{l}} \right\} \tag{2.97}$$

$$B_3 := \left\{ \phi_{\underline{l},\underline{i}} \in V \mid \underline{l} \in \mathbb{N}_0^d,\ \underline{l} = \underline{1},\ \underline{i} \in I_{\underline{l}} \right\} \tag{2.98}$$

Die Elemente der Menge $B_1$ sind die Basisfunktionen der $2^d$ Eckpunkte. Da für sie $||\underline{l}||_1 = 0$ gilt, erfolgt keine Verfeinerung. Die Menge $B_2$ enthält die Wurzeln der Bäume für die Basisfunktionen der übrigen Randpunkte, also die Punkte auf Kanten, Flächen und den Entsprechungen für $d > 3$. Die Menge $B_3$ besitzt als einziges Element die Basisfunktion zum Gitterpunkt $x_{\underline{1},\underline{1}}$, der in der Mitte von $\overline{\Omega}$ liegt.

Mit der Menge aller Wurzeln

$$B := B_1 \cup B_2 \cup B_3 \tag{2.99}$$

ergibt sich das rekursiv definierte Teilintegral der Basisfunktion $\phi_{\underline{l},\underline{i}}$ zu

$$I_{\underline{l},\underline{i}} := \omega_{\underline{l},\underline{i}} \int_{\Omega} \phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x})\ d\Omega \quad + \sum_{(\phi_{\tilde{\underline{l}},\tilde{\underline{i}}},\phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}}) \in E^*_{\underline{l},\underline{i}}} I_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}} \tag{2.100}$$

Die Summe der Teilintegrale über alle Wurzeln ergibt den adaptiven Integrationsalgorithmus

$$I := \sum_{\phi_{\underline{l},\underline{i}} \in B} I_{\underline{l},\underline{i}} \tag{2.101}$$

Er approximiert das Integral der Funktion $f$ über $\Omega$

$$I_\gamma \approx \int_\Omega f(\vec{x})\, d\Omega \tag{2.102}$$

Abbildung 2.10 zeigt die Interpolierende $\widetilde{f}$ von $f(\vec{x}) := \lambda(\vec{x}) \cdot x_1(1 - x_1) \cdot x_2^2$ auf $[0,\, 1]^2$ unter Verwendung des Integrationsalgorithmus. Dabei gilt für den variablen Koeffizienten

$$\lambda(\vec{x}) := \begin{cases} 2 & x_1 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & x_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.103}$$

Die Punkte in der xy-Ebene sind die verwendeten Gitterpunkte. Die Parameter des Algorithmus wurden auf $\varepsilon := 4^{-6}$, $L_{min} := 0$ und $L_{max} := 14$ gesetzt.

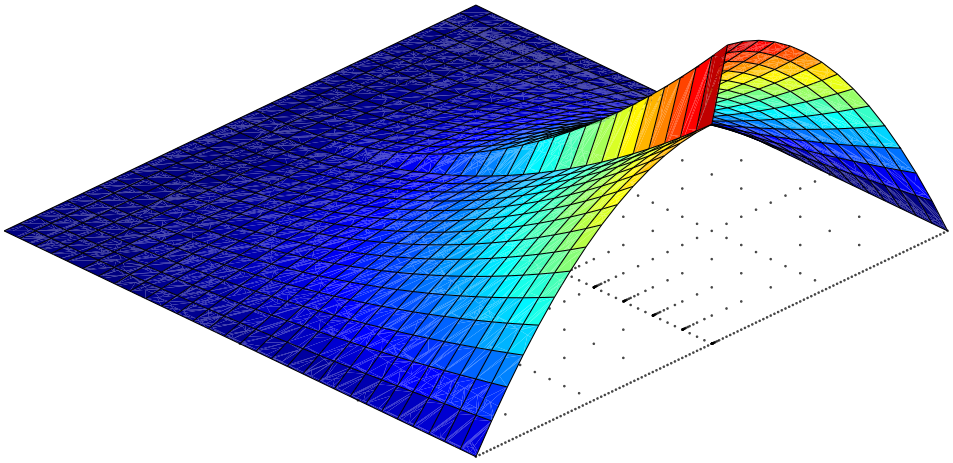


**Abbildung 2.10:** Interpolierende $\widetilde{f}$ von $f(\vec{x}) := \lambda(\vec{x}) \cdot x_1(1 - x_1) \cdot x_2^2$ auf $[0,\, 1]^2$ unter Verwendung des Integrationsalgorithmus. Die Punkte in der xy-Ebene sind die verwendeten Gitterpunkte. $\varepsilon := 4^{-6}$, $L_{min} := 0$ und $L_{max} := 14$.

## 2.8 Singularitäten

Nähert man sich einer Singulartiät, so wächst der Wert der Funktion über alle Grenzen. Dies bedeutet insbesondere, dass die endliche Fließkommadarstellung eines Digitalrechners den Wert nicht mehr als Zahl verarbeiten kann.
Um Integrale singulärer Funktionen trotzdem approximieren zu können, wird ein Parameter $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eingeführt und der Integrand $f$, vor der Auswertung, durch den Integrationsalgorithmus mit Hilfe der Funktion

$$f_\gamma(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & |f(\vec{x})| \leq \gamma \\ -\gamma & f(\vec{x}) < -\gamma \\ +\gamma & f(\vec{x}) > +\gamma \end{cases} \tag{2.104}$$

angenähert, was bedeutet, dass die Funktion $f_\gamma$ betragsmäßig durch $\gamma$ beschränkt wird.
Durch diese Maßnahme, kann $f$ auf eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion zurückgeführt werden. Dabei entsteht ein zusätzlicher Fehler

$$R_\gamma := \int\limits_\Omega f(\vec{x}) - f_\gamma(\vec{x})\, d\Omega \tag{2.105}$$

Als Beispiel seien Funktionen $f_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ der Form

$$f_\alpha(x) := |x|^{-\alpha}\ , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2.106}$$

genannt. Für sie gilt

$$R_\gamma \in \mathcal{O}(\gamma^{1-\frac{1}{\alpha}}) \tag{2.107}$$

**Beweis:** Der Fehler $R_\gamma$ kann nur dann ungleich 0 sein, wenn die Funktion $f_\gamma$ den ursprünglichen Integranden $f$ innerhalb des Integrationsgebietes betragsmäßig überschreitet. Da die Funktion überall positiv ist, gilt $|f_\alpha(x)| = f_\alpha(x)$. Man findet ein $\delta$, so dass $f_\alpha(x) > \gamma$ genau dann gilt, wenn sich $x$ in einem symmetrischen offenen Intervall $(-\delta,\, +\delta)$ befindet.

$$\begin{aligned} & f_\alpha(x) \overset{!}{>} \gamma & & \\ \Leftrightarrow\ & |x|^{-\alpha} \overset{!}{>} \gamma & & \Big|\ ^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & |x|^{\alpha} \overset{!}{<} \gamma^{-1} & & \Big|\ \sqrt[\alpha]{\ } \\ \Leftrightarrow\ & |x| \overset{!}{<} \sqrt[\alpha]{\gamma^{-1}} =: \delta & & \end{aligned} \tag{2.108}$$

Somit ist der Fehler durch

$$R_\gamma = \int\limits_{-\delta}^{+\delta} |x|^{-\alpha} - \gamma\, dx = 2\left( \int\limits_0^\delta x^{-\alpha}\, dx - \int\limits_0^\delta \gamma\, dx \right) = 2\left( \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^\delta - \Big[\gamma x\Big]_0^\delta \right) \tag{2.109}$$

gegeben. Da nach Gleichung 2.106 der Parameter $\alpha$ in $(0,\, 1)$ liegt, kann der auftretende Grenzwert zu 0 berechnet werden:

$$R_\gamma = 2\left( \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \underbrace{\lim_{x\to 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{=0} - \delta\gamma \right) = 2\left( \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \delta\gamma \right) = 2\left( \frac{(\sqrt[\alpha]{\gamma^{-1}})^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \gamma \sqrt[\alpha]{\gamma^{-1}} \right) \tag{2.110}$$

Durch Anwendung verschiedener Potenzgesetze gelangt man schließlich zur Darstellung

$$R_\gamma = 2\gamma^{1-\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} \in \mathcal{O}(\gamma^{1-\frac{1}{\alpha}}) \tag{2.111}$$

□

Mit der Definition des Quadraturfehlers $R_Q$ nach Gleichung 2.29 beläuft sich für den Gesamtfehler $R$ auf

$$R := \int_\Omega f(\vec{x}) - \widetilde{f}_\gamma(\vec{x})\, d\Omega = \int_\Omega f(\vec{x}) - \widetilde{f}(\vec{x})\, d\Omega + R_\gamma = R_Q + R_\gamma \tag{2.112}$$

Der Integrationsalgorithmus für singuläre Funktionen ergibt sich mit den modifizierten hierarchischen Überschüssen

$$\omega_{\underline{l},\underline{i},\gamma} := \left[ -\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \right]^d f_\gamma(\vec{x}_{\underline{l},\underline{i}}) \tag{2.113}$$

zu

$$I_{\underline{l},\underline{i},\gamma} := \omega_{\underline{l},\underline{i},\gamma} \int_\Omega \phi_{\underline{l},\underline{i}}(\vec{x})\, d\Omega \quad + \sum_{(\phi_{\tilde{\underline{l}},\tilde{\underline{i}}},\phi_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}}}) \in E^*_{\underline{l},\underline{i}}} I_{\hat{\underline{l}},\hat{\underline{i}},\gamma} \tag{2.114}$$

$$I_\gamma := \sum_{\phi_{\underline{l},\underline{i}} \in B} I_{\underline{l},\underline{i},\gamma} \tag{2.115}$$

Er approximiert das Integral der durch $\gamma$ beschränkten Funktion $f_\gamma$ über $\Omega$:

$$I_\gamma \approx \int_\Omega f_\gamma(\vec{x})\, d\Omega \tag{2.116}$$

# 3 Softwareentwurf und Implementierung

Die in Abschnitt 2 hergeleiteten Integrationsalgorithmen wurden im Rahmen dieser Arbeit als C++ Programmbibliothek implementiert. Hierbei wurde Gebrauch des C++11 Sprachstandards gemacht. Der Quellcode erfüllt die gcc[1] Schalter `-Wall -Werror -pedantic` für die Version 6.1.1 20160602. Ferner wurde er mit Kommentaren zur Dokumentation mittels Doxygen[2] versehen.

## 3.1 Schnittstelle

Als Schnittstelle dient eine einzige Funktion, deren Prototyp in Quelltext 3.1 abgebildet ist. Hierbei ist der Paramter `gamma` nicht verfügbar, wenn das C Makro `INTEGRAL_NOSINGULARITIES` gesetzt ist. Diese Optimierungsoption sollte nur dann angewendet werden, wenn singuläre Integranden ausgeschlossen werden können. Ist das Makro definiert, wird statt dem Integrationsalgorithmus nach Gleichung 2.115 der nach Gleichung 2.101 verwendet, was die Abfrage auf einen möglichen Überlauf nach jeder Funktionsauswertung ausschaltet.

```
template <typename T, typename F, size_t N>
T integral(
            const F& f,
            std::array<T, N> a,
            std::array<T, N> b,
            T epsilon,
            size_t l_min,
            size_t l_max,
            T gamma
);
```

**Quelltext 3.1:** Schnittstelle der Softwarebibliothek

In Tabelle 3.1 sind die Template- und Aufrufparameter sowie deren Randbedingungen beschrieben.

[1] Abkürzend für Gnu Compiler Collection. Open source C++ Compiler. Siehe `https://gcc.gnu.org/`
[2] Open source Software zur Erzeugung von Dokumentation aus Quellcode. Siehe `http://www.doxygen.org/`

| Parameter | Beschreibung |
|---|---|
| `T` | Fließkommadatentyp, der Verwendung finden soll. |
| `F` | Typ des Funktors, mit dem der Integrand beschrieben ist. Muss durch `T operator() (const std::array<T,D>&)` aufrufbar sein. Ermöglicht die Wahl zwischen schnellen C-Funktionszeigern und einfach zu bedienenden Funktoren wie `std::function` oder Lambdas. |
| `D` | Anzahl der Dimensionen. Muss größer als 0 sein. |
| `f` | Integrand |
| `a` | Erster aufspannender Punkt des abgeschlossenen rechtwinkligen Gebietes $\overline{\Omega}$. |
| `b` | Zweiter aufspannender Punkt des abgeschlossenen rechtwinkligen Gebietes $\overline{\Omega}$. Muss komponentenweise größer als `a` sein. |
| `epsilon` | Obere Schranke $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ für den Betrag des hierarchischen Überschusses nach Gleichung 2.86. |
| `l_min` | Untere Schranke $L_{min} \in \mathbb{N}_0$ für die Stufe $\|\|\underline{l}\|\|_1$ nach Gleichung 2.91. |
| `l_max` | Obere Schranke $L_{max} \in \mathbb{N}$ für die Stufe $\|\|\underline{l}\|\|_1$ nach Gleichung 2.87. Darf nicht kleiner als `l_min` sein. Für `l_min` = `l_max` ergibt sich ein klassisches dünnes Gitter der entsprechenden Stufe. |
| `gamma` | Obere Schranke $\gamma \in \mathbb{R}^+$ für den Betrag der Funktion. Nicht verfügbar, wenn `INTEGRAL_NOSINGULARITIES` gesetzt ist. |

**Tabelle 3.1:** Beschreibung der Schnittstellenparameter. Oben: Templateparameter. Unten: Aufrufparameter

## 3.2 Aspekte der Implementierung

Die Integration erfolgt durch Traversierung des in Abschnitt 2 beschriebenen Waldes. Die drei Mengen von Wurzeln $B_1$, $B_2$ und $B_3$ werden dabei nacheinander abgearbeitet, ihre Teilsummen akkumuliert und von `integral` zurückgegeben.
Zuerst werden zu den Eckpunkten gehörigen Basisfunktionen ($B_1$) innerhalb der Funktion `integral` integriert und summiert. Ihre Anzahl ist stets $2^d$ und von ihnen gehen keine Kanten aus, weshalb dieses Teilproblem iterativ implementiert wurde.
Anschließend werden aus `integral` die Hilfsfunktionen `integral_aux_boundary` für die Basisfunktionen der verbleibenden Randpunkte ($B_2$) sowie `integral_aux` für den inneren Punkt $x_{\underline{1},\underline{1}}$ aufgerufen. Sie entsprechen dem Term aus Gleichung 2.114 (bzw. Gleichung 2.100, wenn `INTEGRAL_NOSINGULARITIES` gesetzt ist). Die Trennung erfolgt aus Laufzeitgründen. Beide Hilfsfunktionen erzeugen durch Rekursion ihre jeweiligen Bäume. Dabei erfolgt für jede durch Verfeinerung entstandene Basisfunktion ein weiterer Rekursionsschritt.

`integral_aux_boundary` umfasst den Funktionsumfang von `integral_aux` vollständig und zusätzlich die gesonderte Behandlung für die *Stencils* am Rand des Integrationsgebietes und die Verwaltung für die Stufe $\underline{l}$ und den Index $\underline{i}$.

Beginnend ab der höchsten noch zu verfeinernden Dimension `dimension`, also dem zugehörigen Kantengewicht, werden die Hilfsfunktionen rekursiv mit `dimension-1` aufgerufen, bis sie zu 0

dekrementiert ist. Bei dieser Ausführung wird der hierarchische Überschuss ermittelt und mit dem Integral der Basisfunktion gewichtet.
Ist das Verfeinerungskriterium nach Gleichung 2.92 erfüllt, werden die Teilsummen der weiteren Aufrufe mit höherer Stufe $\underline{l}$ akkumuliert und zurückgegeben sowie ein Boolescher Wert für die höheren Dimensionen auf wahr gesetzt. Tritt dies ein, werden die Basisfunktionen dort entsprechend ihrer `dimension` verfeinert.

Um den hierarchischen Überschuss einer Basisfunktion zu berechnen, müssen im Falle eines inneren Gitterpunktes $3^d$ Werte verarbeitet werden. Von diesen sind bereits $2 \cdot 3^{d-1}$ in der vorherigen Stufe zur Verwendung gekommen, weshalb sie mittels dynamischer Programmierung an die Basisfunktionen höherer Stufe $\underline{l}$ durchgereicht werden. So kann die Anzahl der Funktionsauswertungen, welche in Abhängigkeit vom Integranden viel Rechenzeit erfordern können, reduziert werden.
Als weitere Optimierung wird der Träger der Basisfunktionen im Voraus berechnet und an `integral_aux` und `integral_aux_boundary` übergeben, um die Stützstellen der fehlenden Funktionsauswertungen einfacher berechnen zu können, als mit den in Abschnitt 2 Gleichungen für $x_{\underline{l},\underline{i}}$. Außerdem wird sein Volumen vorberechnet, was mit einem Faktor $2^{-d}$ dem Integral der Basisfunktion über $\Omega$ entspricht. Die Maßnahmen haben zur Konsequenz, dass die Multiindizes $\underline{l}$ und $\underline{i}$ für `integral_aux` nicht ausgewertet und damit nicht implementiert werden müssen. Sie werden allerdings in `integral_aux_boundary` benötigt, um die Bedingung nach Gleichung 2.81 einzuhalten und den *Stencil* für den hierarchischen Überschuss zu bestimmen.

Für die Verfeinerung wird ein Lambda verwendet, welches die fehlenden Funktionswerte, den Träger und sein Volumen berechnet sowie für `integral_aux_boundary` $\underline{l}$ und $\underline{i}$ vorbereitet. Danach ruft es die jeweilige Hilfsfunktion für die beiden Teilgebiete in der aktuellen `dimension` auf.

# 4 Evaluierung

Um den Algorithmus nach Gleichung 2.115 auf Eignung hinsichtlich der Problemstellung zu prüfen, werden ausgewählte, analytisch lösbare Integranden zur Ermittlung des Fehlerbetrages $|R|$ nach Gleichung 2.112 betrachtet und in Abhängigkeit verschiedener Testparameter ausgewertet.

Die Rechnungen wurden auf folgendem Testsystem durchgeführt:

- Intel Core i5-4200U
- Arch Linux x64 mit Kernel Version 4.6.3-1-ARCH
- gcc Version 6.1.1 20160602

In allen drei Testreihen ist $L_{min} := 0$ gesetzt.

## 4.1 Testreihe 1: Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter

Diese Testreihe vergleicht klassische dünne Gitter mit adaptiven. Dabei werden für die klassische Variante der Testparameter $L$ (Stufe) variiert, für die adaptive die Testparameter $\varepsilon$ (Schranke des hierarchischen Überschusses) und $L_{max}$ (Maximalstufe). Die Wertebereiche sind durch

$$L \in \{\ 1,\ \ldots,\ 14\ \} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon \in \{\ 4^{-i} \mid 0 \leq i \leq 13\ \} \tag{4.2}$$

$$L_{max} \in \{\ 10, 20, 30\ \} \tag{4.3}$$

gegeben.

Aus Gründen der Vergleichbarkeit werden zur Darstellung der Ergebnisse jeweils der Betrag des Gesamtfehlers $|R|$ über der Anzahl der Gitterpunkte aufgetragen. Weitere Darstellungen zeigen $|R|$ in Abhängigkeit von $L$ und $\varepsilon$.

Es werden zwölf Testfunktionen untersucht, welche in vier Funktionsklassen mit jeweils einem $d$-dimensionalen Vertreter dieser unterteilt sind. Für die Dimension gilt $d \in \{1, 2, 3\}$. Das Integrationsgebiet ist das jeweilige $d$-dimensionale Einheitsintervall $[0,\ 1]^d$.

Die vier, mit $c \in \{1, 2, 3, 4\}$ bezeichneten Funktionsklassen sind:

1. Hinreichend glatte Funktionen
2. Stetige, nicht differenzierbare Funktionen
3. Unstetige, nicht singuläre Funktionen
4. Singuläre Funktionen

Der eindimensionale Vertreter der Klasse $c$ wird mit $f_{c,1} : [0,\ 1] \mapsto \mathbb{R}$ bezeichnet, die Lösung des zugehörigen Integrals mit

$$I_{c,1} := \int_0^1 f_{c,1}(x)\, dx \tag{4.4}$$

Durch den Tensorproduktansatz verallgemeinert man $f_{c,1}$ zum $d$-dimensionalen Integranden

$$f_{c,d}(\vec{x}) := \prod_{k=1}^{d} f_{c,k}(x_k) \tag{4.5}$$

und die zugehörigen Integrale lösen sich wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten durch Vertauschen von Integral und Produkt

$$I_{c,d} := \int_{[0,1]^d} f_{c,d}(\vec{x})\, d\Omega = \int_{[0,1]^d} \prod_{k=1}^{d} f_{c,1}(x_k)\, d\Omega = \prod_{k=1}^{d} \int_0^1 f_{c,1}(x)\, dx = \prod_{k=1}^{d} I_{c,1} = I_{c,1}^d \tag{4.6}$$

Tabelle 4.1 enthält die gewählten eindimensionalen Vertreter sowie die analytische Lösung der entsprechenden Integrale für alle vier Funktionsklassen.

| Funktionsklasse $c$ | Eindimensionaler Vertreter $f_{c,1}$ | Analytische Lösung $I_{c,1}$ |
|---|---|---|
| 1 | $f_{1,1}(x) := \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right)$ | $I_{1,1} = \frac{4}{75}$ |
| 2 | $f_{2,1}(x) := \left\lvert x - \frac{1}{5} \right\rvert \cdot \left\lvert x - \frac{3}{5} \right\rvert$ | $I_{2,1} = \frac{28}{375}$ |
| 3 | $f_{3,1}(x) := \begin{cases} 1 & 0,3 \leq x \leq 0,7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $I_{3,1} = \frac{2}{5}$ |
| 4 | $f_{4,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\lvert x-0,36 \rvert}}$ | $I_{4,1} = \frac{14}{5}$ |

**Tabelle 4.1:** Eindimensionale Vertreter $f_{c,1}$ der vier Funktionsklassen und die entsprechende analytische Lösung des Integrals $I_{c,1}$

Für alle Datenerhebungen ist $\gamma := 10^5$ gesetzt.

Abbildung 4.1 bis Abbildung 4.4 tragen den Fehlerbetrag $|R|$ für die vier Funktionsklassen über der Anzahl der Gitterpunkte auf, Abbildung 4.5 stellt ihn für klassische Gitter und alle Funktionsklassen in Abhängigkeit der Stufe $L$ dar, Abbildung 4.6 für adaptive Gitter und ebenfalls für alle Funktionsklassen in Abhängigkeit von $\varepsilon$. Hierbei ist $L_{max} := 30$ gesetzt.

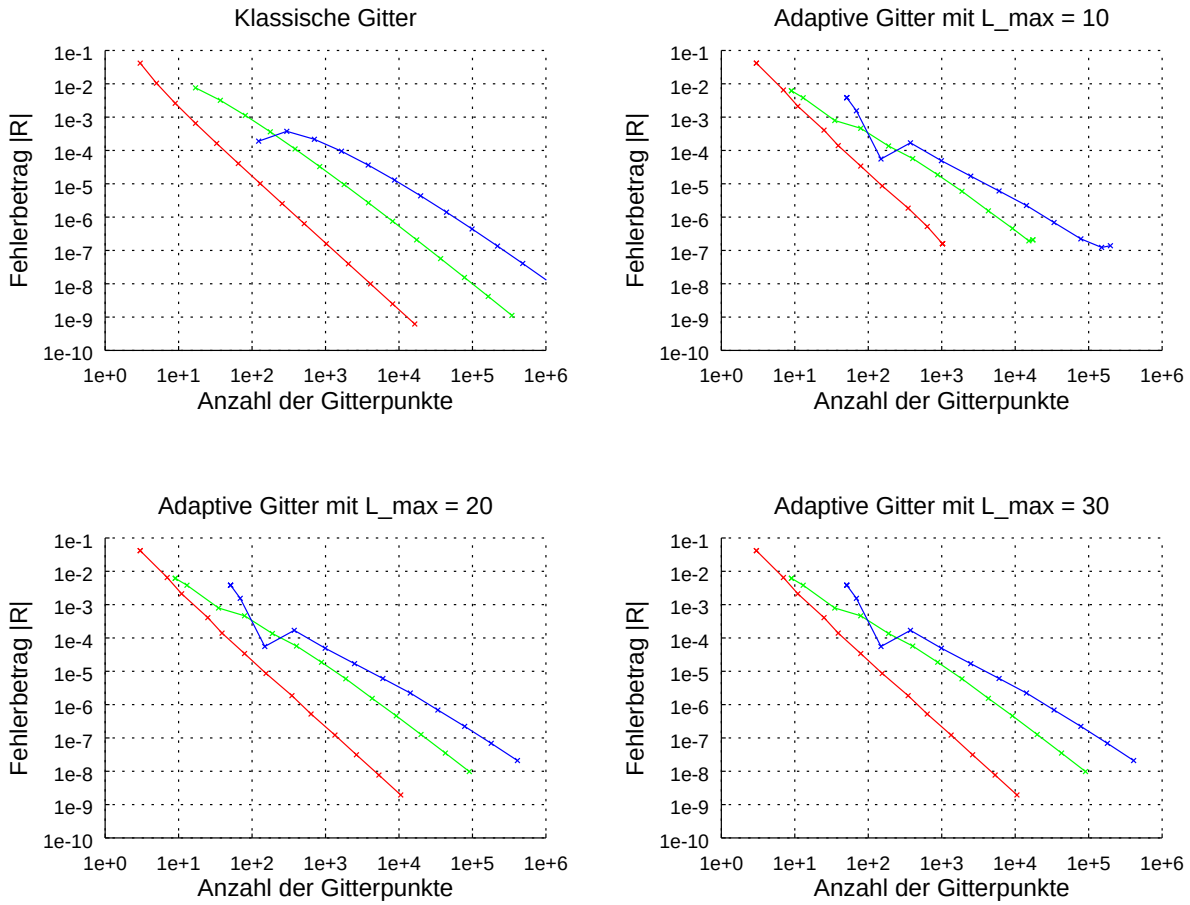



**Abbildung 4.1:** Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist für Funktionsklasse 1 über der Anzahl der Gitterpunkte aufgetragen. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$.

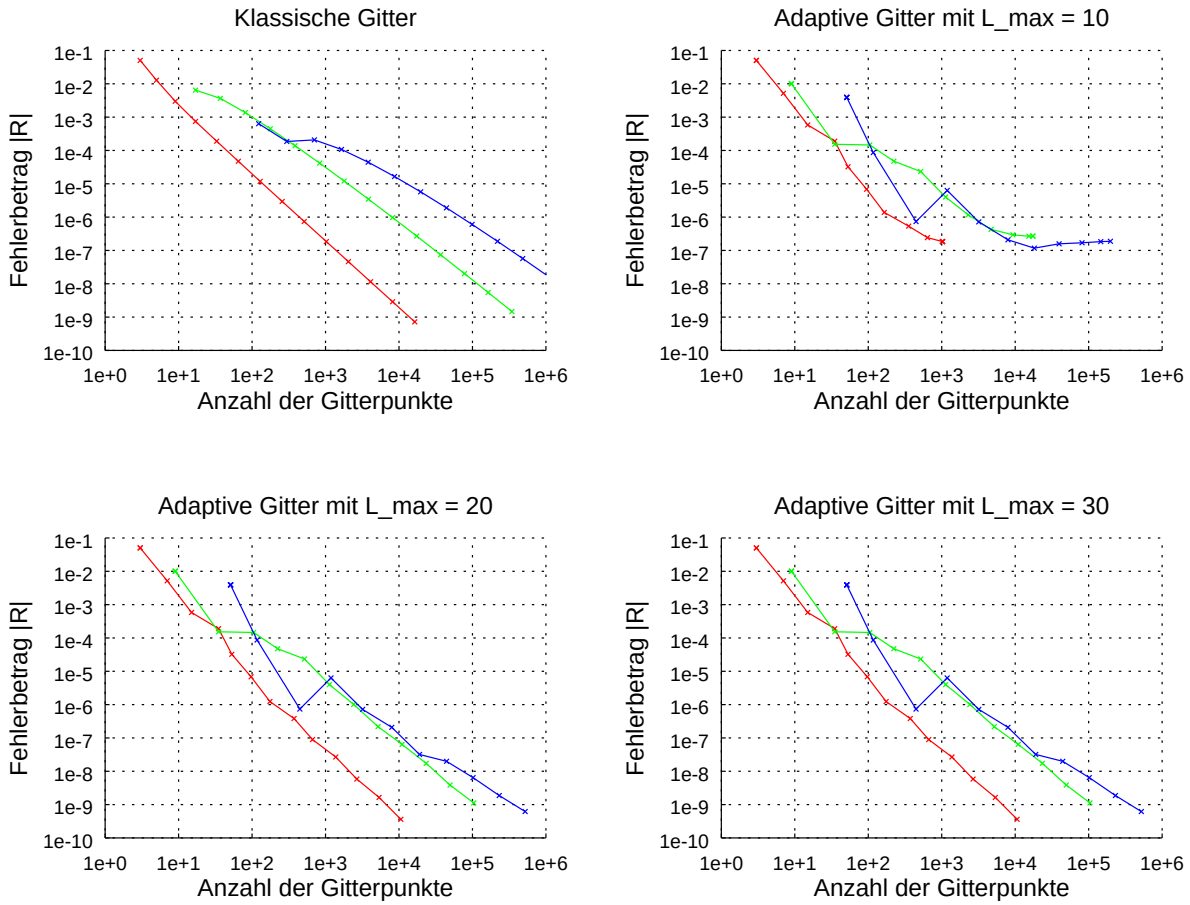



**Abbildung 4.2:** Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist für Funktionsklasse 2 über der Anzahl der Gitterpunkte aufgetragen. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$.

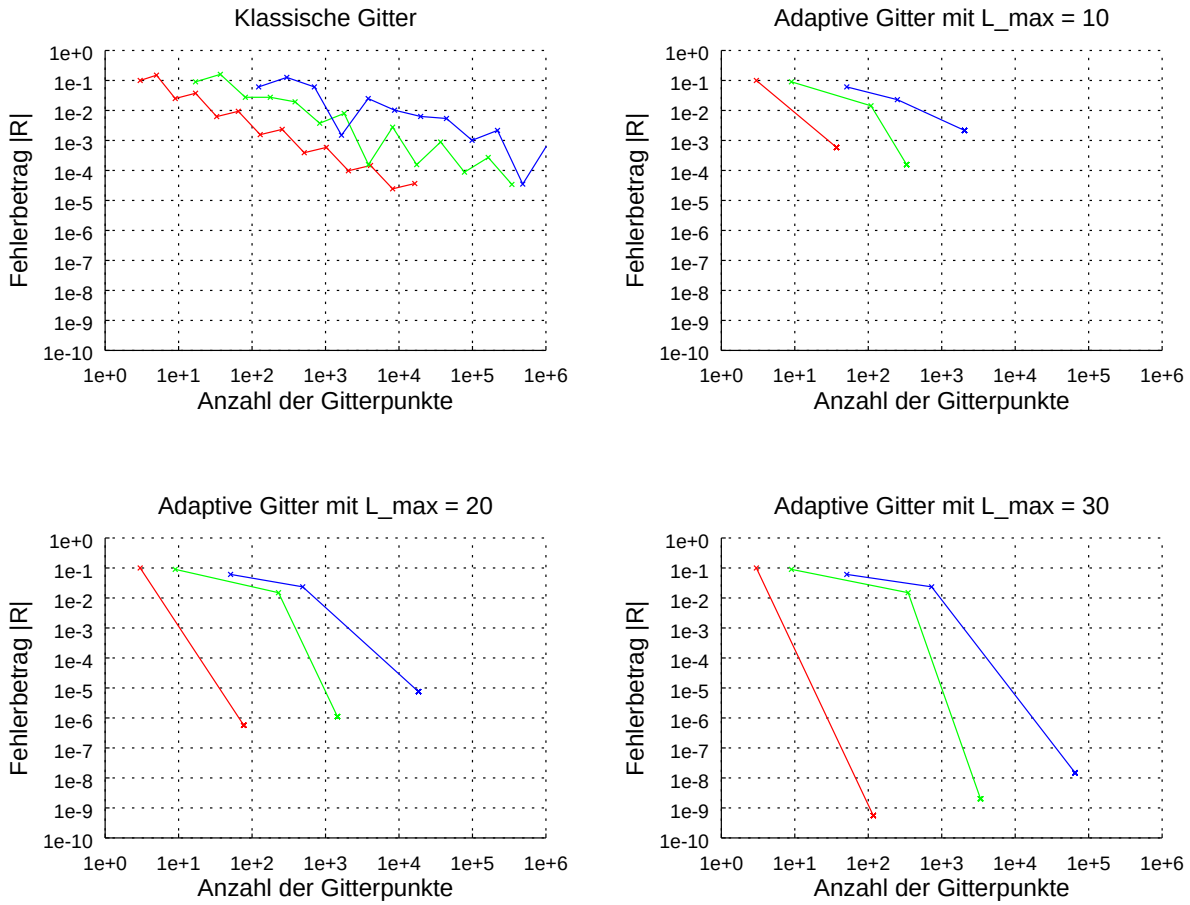



**Abbildung 4.3:** Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist für Funktionsklasse 3 über der Anzahl der Gitterpunkte aufgetragen. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$.

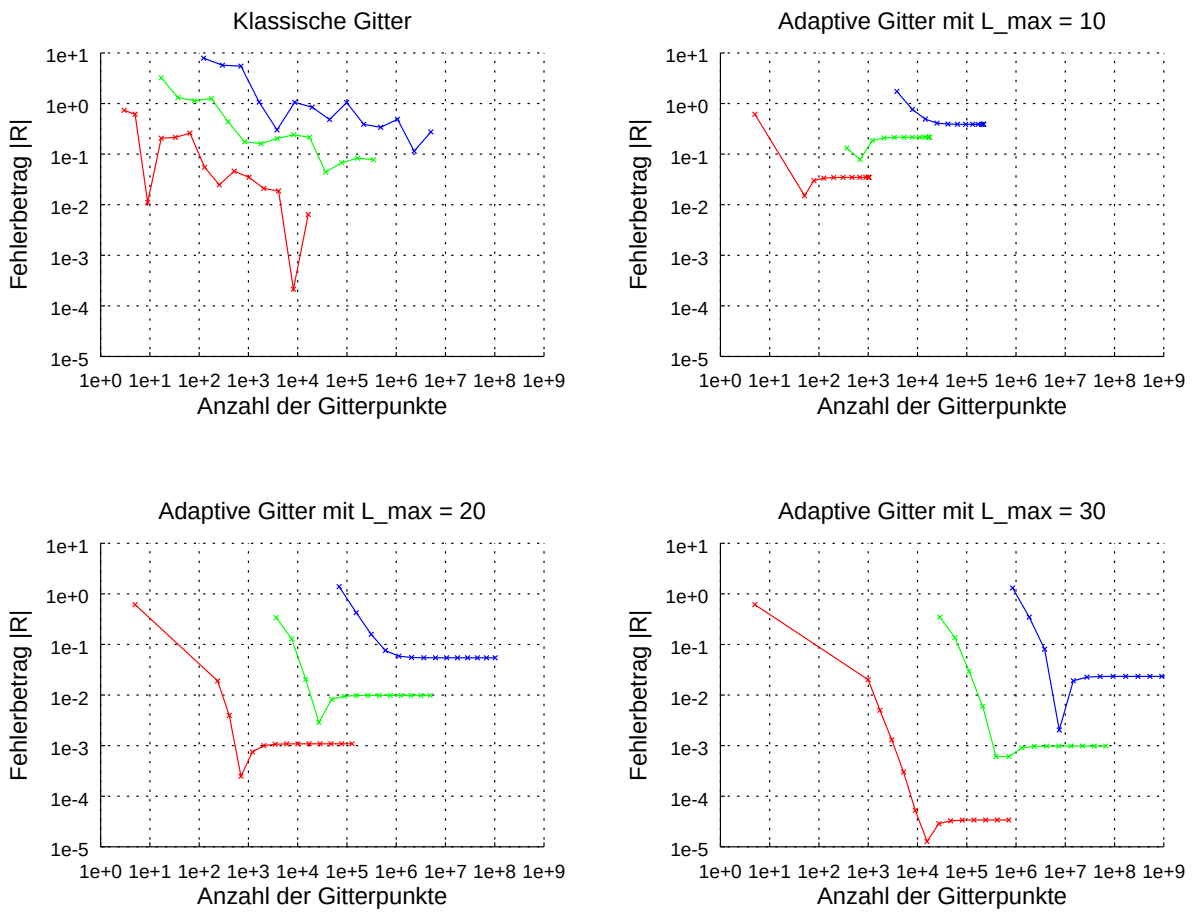



**Abbildung 4.4:** Vergleich klassischer und adaptiver dünner Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist für Funktionsklasse 4 über der Anzahl der Gitterpunkte aufgetragen. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$

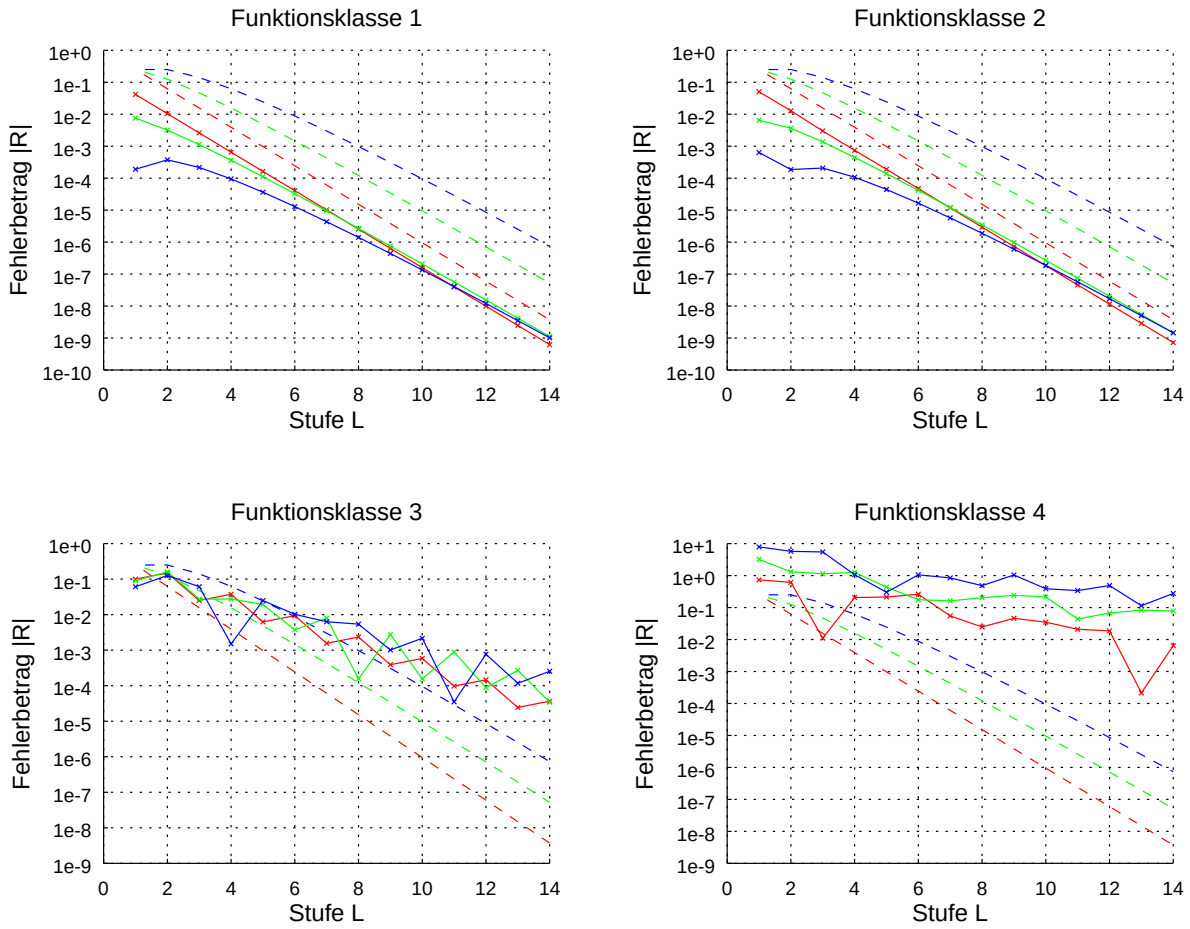



**Abbildung 4.5:** Kovergenz für klassische dünne Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist über der Stufe $L$ aufgetragen. Die Fehlerabschätzungen aus Tabelle 2.1 sind gestrichelt dargestellt. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$.

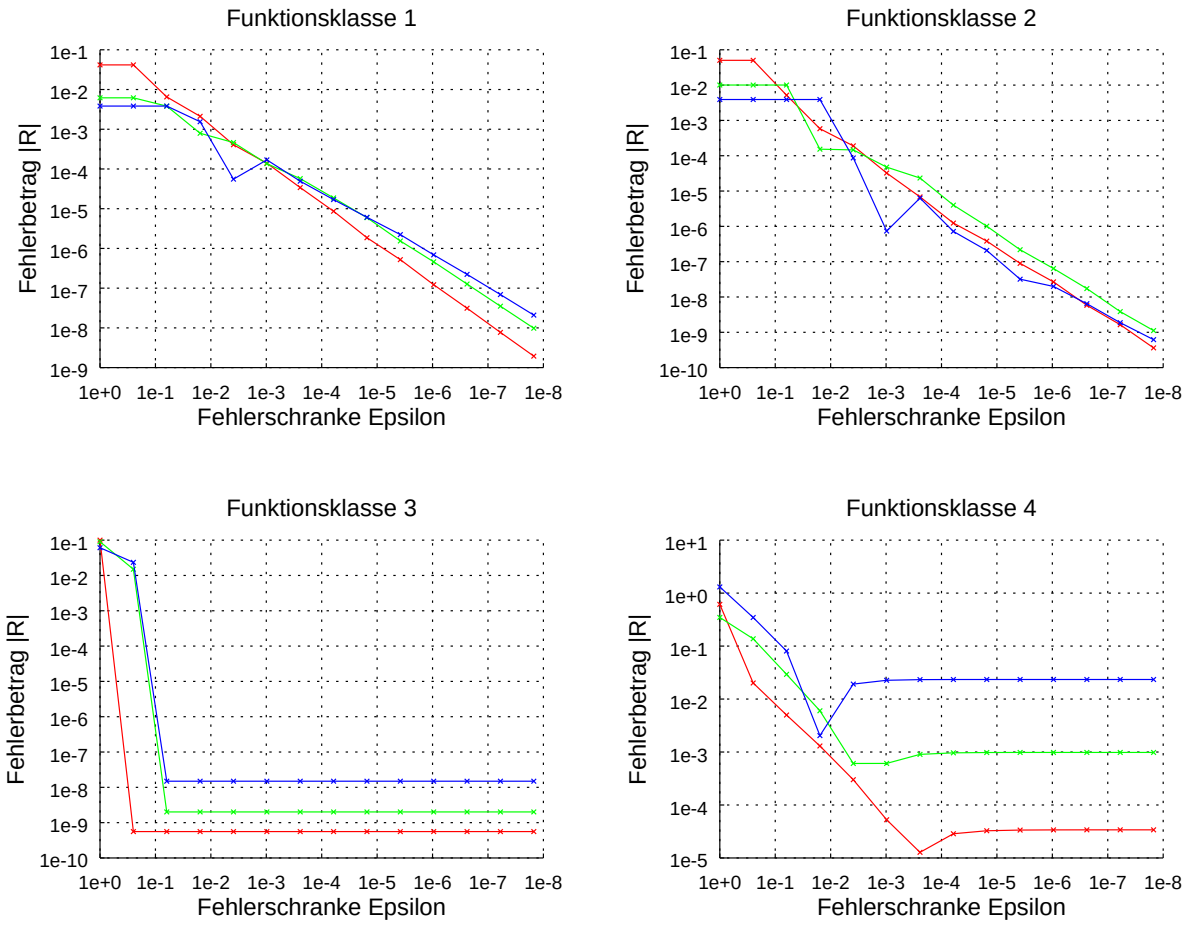



**Abbildung 4.6:** Kovergenz für adaptive dünner Gitter. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist über der Schranke des hierarchischen Überschuss $\varepsilon$ für $L_{max} = 30$ aufgetragen. $\gamma = 10^5$. Rot: $d = 1$. Grün: $d = 2$. Blau: $d = 3$.

**Auswertung:** Für Funktionsklasse 1 und 2 liegen alle Fehlerbeträge unterhalb der Abschätzung. Die Fehler zwischen klassischen und adaptiven Gittern für Funktionen der Klasse 1 unterscheiden sich um einen geringfügigen und annähernd konstanten Faktor. Im Gegensatz dazu steht Funktionsklasse 2: Adaptive Gitter approximieren das Integral hier genauer. Die lokalen Fehlerminima der ersten beiden Funktionsklassen für $d = 3$ und 149 bzw. 447 Gitterpunkten bei Verwendung adaptiver dünner Gitter bedürfen weiterer Untersuchung. Klassische Gitter nähern sich für Klasse 3 nur langsam und oszillierend dem analytischen Wert, während die adaptive Version für $L_{max} = 20$ und $L_{max} = 30$ bereits mit weniger Gitterpunkten einen um Größenordnungen kleineren Fehlerbetrag erbringen. Auch für die singulären Funktionen der Funktionsklasse 4 approximieren adaptive Gitter mit $L_{max} = 20$ und $L_{max} = 30$ das Integrale genauer, als klassische. Adaptiven Gittern mit $L_{max} = 10$ stehen zu wenig Basisfunktionen zur Verfügung, um gute Näherung zu erbringen.
Da die Funktionen der Klasse 4 - mit Ausnahme der Singularität - konvex sind, werden sie von den Interpolierenden überschätzt, also gilt $R_Q < 0$. Dieser Fehler wird mit steigender Gitterpunktanzahl kleiner. Im Gegensatz dazu führt die Beschränkung des Funktionsbetrags durch $\gamma$ zu einem zu kleinen Wert für die Approximation des Integrals, also $R_\gamma > 0$. Dieser Fehler ist konstant in $\varepsilon$. Beide Effekte heben sich beim jeweiligen Fehlerminimum auf. Der verbleibende Fehlerbetrag entsteht durch die Schranke $\gamma$. Für $d = 1$ und $L_{max} = 30$ entspricht er weitgehend der Abschätzung aus Gleichung 2.111.

## 4.2 Testreihe 2: Variation der Schranke $\gamma$

In dieser Testreihe werden die Schranke für den Betrag der hierarchischen Überschusses $\varepsilon$, die obere Schranke des Funktionsbetrages $\gamma$ und die maximale Stufe $L_{max}$ variiert. Die Wertebereiche sind durch

$$\varepsilon \in \{\ 4^{-i} \mid 5 \leq i \leq 18\ \} \tag{4.7}$$

$$\gamma \in \{\ 10^{i} \mid 4 \leq i \leq 8\ \} \tag{4.8}$$

$$L_{max} \in \{\ 30, 45, 60, 75\ \} \tag{4.9}$$

definiert. Integriert wird die in Testreihe 1 definierte Funktion $f_{4,1}$ über [0, 1]. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.7 dargestellt.

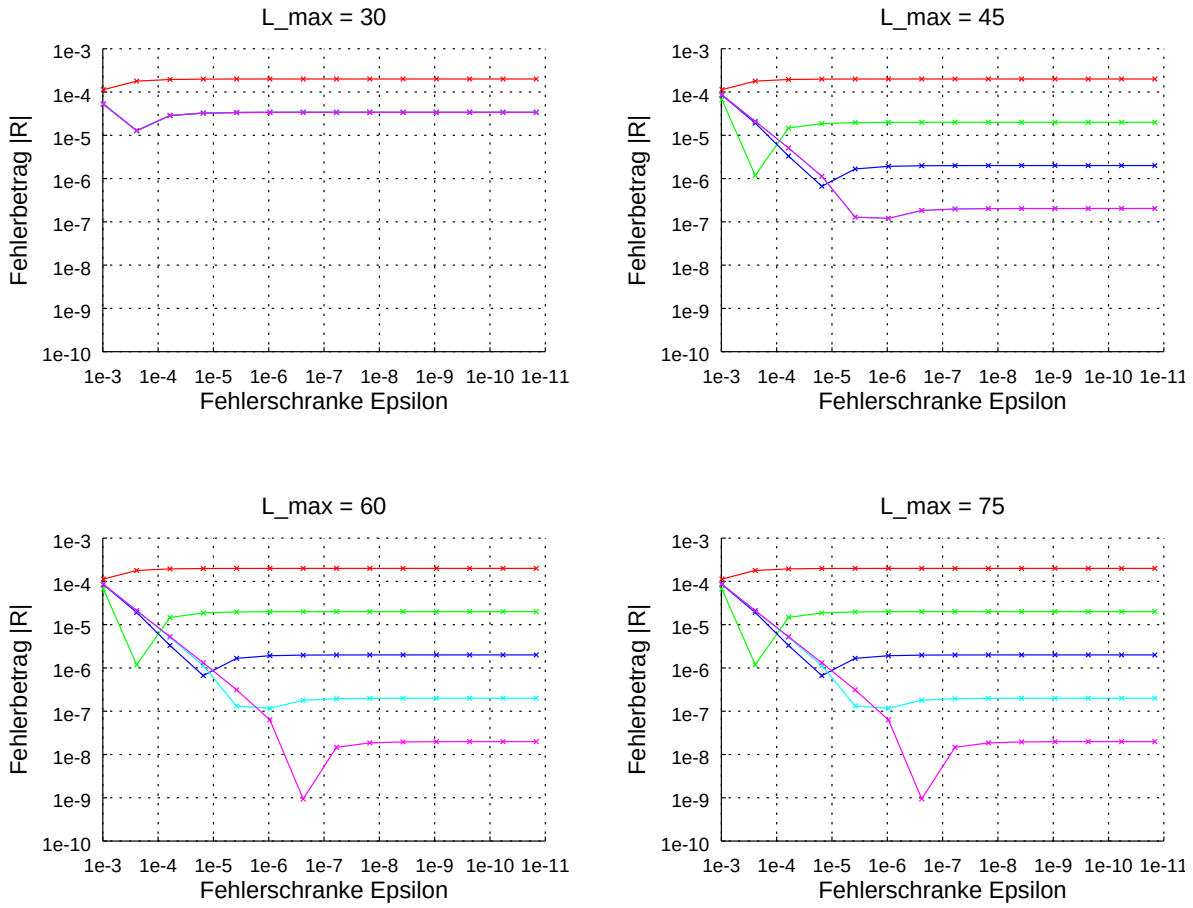



**Abbildung 4.7:** Variation von $\gamma$. Der Fehlerbetrag $|R|$ ist für $f_{4,1}$ über $\varepsilon$ aufgetragen. Dabei variieren $\gamma$ und $L_{max}$. Rot: $\gamma = 10^4$. Grün: $\gamma = 10^5$. Blau: $\gamma = 10^6$. Cyan: $\gamma = 10^7$, Magenta: $\gamma = 10^8$.

**Auswertung:** Zu erkennen ist, dass die Schranke $L_{max}$ hinsichtlich der Konvergenz von $\gamma$ abhängt. Erhöht man $\gamma$, so muss man auch $L_{max}$ erhöhen, um eine korrekte Approximation zu erhalten. Für $L_{max} = 75$ und $\gamma = 10^8$ ist der approximierte Wert von der Abschätzung nach Gleichung 2.111 kaum zu unterscheiden. Die relative Abweichung beträgt etwa $0,81\%$.

## 4.3 Testreihe 3: Berechnung lokaler Steifigkeitsmatrizen

In dieser Testreihe wird eine lokale Steifigkeitsmatrix $A^0 \in \mathbb{R}^{d^2 \times d^2}$ durch den Integrationsalgorithmus nach Gleichung 2.115 approximiert. Hierbei werden die Dimension $d$ und die Schranke für den Betrag des hierarchischen Überschuss $\varepsilon$ variiert. Die Maximalstufe ist auf $L_{max} = 30$ gesetzt, die Schranke für den Funktionsbetrag auf $\gamma := 10^5$. Die Wertemenge der variablen Größen ist definiert durch

$$d \in \{2, 4, 6\} \tag{4.10}$$

$$\varepsilon \in \{\ 4^{-i} \mid 0 \leq i \leq 10\ \} \tag{4.11}$$

Messmetrik $|R_M|$ ist der Mittelwert der Absolutfehler aller Komponenten $|R_{i,j}|$

$$|R_M| := 2^{-4d} \cdot \sum_{i=1}^{d^2} \sum_{j=1}^{d^2} |R_{i,j}| \tag{4.12}$$

Hierbei bezeichnet $R_{i,j}$ den Fehler von $A^0_{i,j}$ gemäß Gleichung 2.112. Die Komponenten von $A^0$ sich durch

$$A^0_{i,j} := \int_{\Omega} \lambda(\vec{x}) \cdot \Phi_i(\vec{x}) \cdot \Phi_j(\vec{x})\ d\Omega \tag{4.13}$$

definiert. Dabei ist $\lambda : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ ein variabler Koeffizient mit Sprung:

$$\lambda(\vec{x}) := \begin{cases} \lambda_1 := \frac{1}{2} & x_1 \leq \frac{a_1+b_1}{2} \\ \lambda_2 := 2 & x_1 > \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases} \tag{4.14}$$

Die Integranden haben eine ähnliche Form, wie die in der stationären Wärmeleitungsgleichung nach Gleichung 2.25. Sie wurden vereinfacht, um nachvollziehbare analytische Lösung finden zu können.

Das abgeschlossene Gebiet des linearen Lagrangeelementes $\overline{G}_0$ wird durch die Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$ aufgespannt:

$$\overline{G}_0 := \sum_{k=1}^{d} \left[\frac{1}{5} \cdot k,\ \frac{2}{5} \cdot k^2\right] \tag{4.15}$$

Die Wahl der Integranden und des Gebietes erfolgte nicht nach physikalischen Gegebenheiten. Vielmehr soll der Test die Anwendbarkeit auf eine hochdimensionale partielle Differentialgleichungen mit unstetigem variablem Koeffizienten erproben. Die Ausdehnung des Gebietes $G_0$ variiert in den verschiedenen Dimensionen. Dies ist eine praxisnähere Annahme, als das würfelförmige Gebiet aus den vorherigen Testreihen.

Durch $B : \mathbb{N}_0 \times \{1, \ldots, d\} \mapsto \{0, 1\}$

$$B(i,k) := \lfloor i \cdot 2^{1-k} \rfloor \; mod \; 2 \tag{4.16}$$

ist eine Funktion gegeben, welche die Zahl $i \in \mathbb{N}_0$ auf ihre $k$-te binäre Stelle abbildet. Aus den Funktionen $\Phi_{0,a,b}, \Phi_{1,a,b} : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$\Phi_{0,a,b}(x) := \frac{x-b}{a-b} \tag{4.17}$$

$$\Phi_{1,a,b}(x) := \frac{x-a}{b-a} \tag{4.18}$$

gehen durch Verwendung des Tensorproduktes die $d$-dimensionalen FEM Ansatzfunktionen

$$\Phi_{i,\vec{a},\vec{b}}(\vec{x}) := \prod_{k=1}^{d} \Phi_{B(i,k),a_k,b_k}(x_k) \tag{4.19}$$

hervor. Die zu lösenden Integrale ergeben sich somit zu

$$A^0_{i,j} = \int\limits_{\Omega} \lambda(\vec{x}) \cdot \Phi_{i,\vec{a},\vec{b}}(\vec{x}) \cdot \Phi_{j,\vec{a},\vec{b}}(\vec{x}) \; d\Omega = \int\limits_{\Omega} \lambda(\vec{x}) \cdot \Big( \prod_{k=1}^{d} \Phi_{i,a_k,b_k}(\vec{x}) \Big) \cdot \Big( \prod_{k=1}^{d} \Phi_{j,a_k,b_k}(\vec{x}) \Big) \; d\Omega \tag{4.20}$$

Durch Verwendung der Unabhängigkeit der Koordinaten gelangt man zu der Darstellung

$$A^0_{i,j} = \lambda_1 \cdot T_{i,j,1} + \lambda_2 \cdot T_{i,j,2} = \frac{1}{2} \cdot T_{i,j,1} + 2 \cdot T_{i,j,2} \tag{4.21}$$

mit den beiden Teilintegralen

$$T_{i,j,1} := \int\limits_{a_1}^{\frac{a_1+b_1}{2}} \Phi_{B(i,1),a_1,b_1}(x) \cdot \Phi_{B(j,1),a_1,b_1}(x) \; dx \cdot \prod_{k=2}^{d} \int\limits_{a_k}^{b_k} \Phi_{B(i,k),a_k,b_k}(x) \cdot \Phi_{B(j,k),a_k,b_k}(x) \; dx \tag{4.22}$$

$$T_{i,j,2} := \int\limits_{\frac{a_1+b_1}{2}}^{b_1} \Phi_{B(i,1),a_1,b_1}(x) \cdot \Phi_{B(j,1),a_1,b_1}(x) \; dx \cdot \prod_{k=2}^{d} \int\limits_{a_k}^{b_k} \Phi_{B(i,k),a_k,b_k}(x) \cdot \Phi_{B(j,k),a_k,b_k}(x) \; dx \tag{4.23}$$

Die auftretenden Integrale berechnen sich zu

$$\int_{a_1}^{\frac{a_1+b_1}{2}} \Phi_{B(i,1),a_1,b_1}(x) \cdot \Phi_{B(j,1),a_1,b_1}(x)\, dx = \begin{cases} \frac{7\cdot(b_1-a_1)}{24} & (B(i,k)=0)\wedge(B(j,k)=0) \\ \frac{b_1-a_1}{24} & (B(i,k)=1)\wedge(B(j,k)=1) \\ \frac{b_1-a_1}{12} & B(i,k)\neq B(j,k) \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\int_{\frac{a_1+b_1}{2}}^{b_1} \Phi_{B(i,1),a_1,b_1}(x) \cdot \Phi_{B(j,1),a_1,b_1}(x)\, dx = \begin{cases} \frac{b_1-a_1}{24} & (B(i,k)=0)\wedge(B(j,k)=0) \\ \frac{7\cdot(b_1-a_1)}{24} & (B(i,k)=1)\wedge(B(j,k)=1) \\ \frac{b_1-a_1}{12} & B(i,k)\neq B(j,k) \end{cases} \tag{4.25}$$

$$\int_{a_k}^{b_k} \Phi_{B(i,k),a_k,b_k}(x) \cdot \Phi_{B(j,k),a_k,b_k}(x)\, dx = \begin{cases} \frac{b_k-a_k}{3} & B(i,k)=B(j,k) \\ \frac{b_k-a_k}{6} & B(i,k)\neq B(j,k) \end{cases} \tag{4.26}$$

Abbildung 4.8 trägt den Betrag des mittleren Fehlers $|R_M|$ über $\varepsilon$ auf.

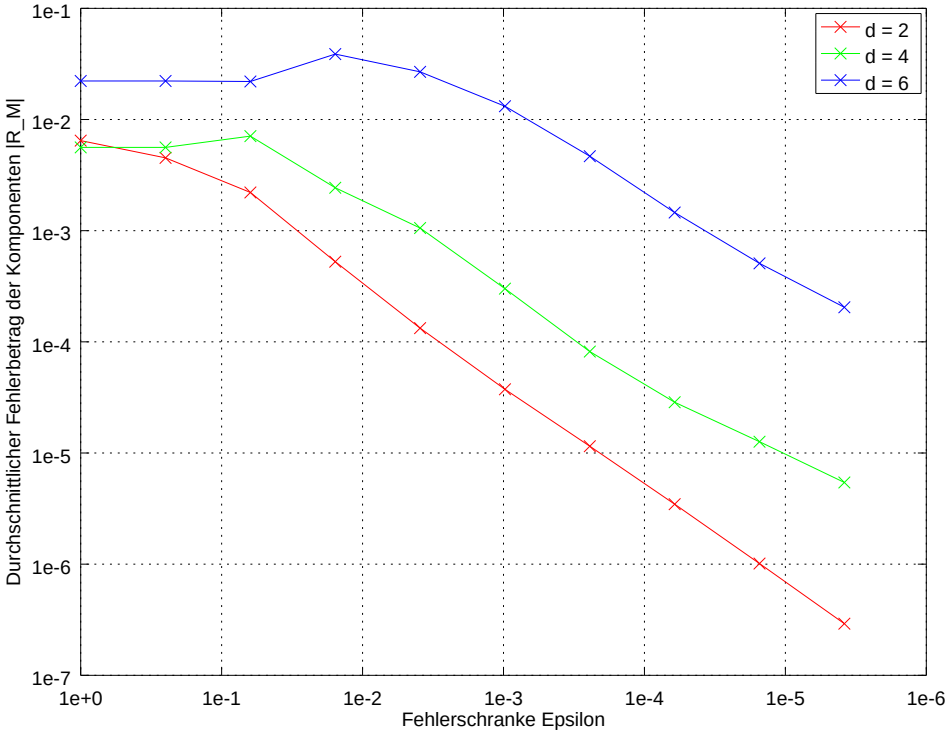



**Abbildung 4.8:** Durchschnittlicher Fehlerbetrag $|R_M|$ der Matrixkomponenten über der Schranke für den Betrag des hierarchischen Überschuss $\varepsilon$ aufgetragen. $L_{max} = 30, \gamma = 10^5$. Rot: $d = 2$. Grün: $d = 4$. Blau: $d = 6$. $\gamma = 10^{-5}$

**Auswertung:** Für $\varepsilon \leq 10^{-2}$ sinkt der Durchschnittsfehler $|R_M|$ für alle drei Testfälle mit annähernd konstantem Faktor. Für höhere Dimensionen ergibt sich ein höherer Durchschnittsfehler. Die entspricht den Erwartungen nach Tabelle 2.1. Im Rahmen der Messdaten eignet sich der Algorithmus also, um die lokale Steifigkeitsmatrix des Testproblems zu berechen.

# 5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Verlauf der Arbeit wurde die Notwendigkeit numerischer Integration aufgezeigt und die zu berechnenden Terme exemplarisch hergeleitet. Danach wurden $||\cdot||_{L^2}$ optimale dünne Gitter vorgestellt, wie sie in [1] hergeleitet werden. Die Entscheidung für diese spezielle Art dünner Gitter wurde auf die Erkenntniss gestützt, dass der Betrag des Integrationsfehlers durch die $||\cdot||_{L^2}$-Norm der Fehlerfunktion abgeschätzt werden kann. Die Behandlung von Randwerten erfolgte. wie in [2] hergeleiteten, durch Hinzunahme der Basisfunktionen $\phi_{0,0}$ und $\phi_{0,1}$ zur hierarchischen Basis. Um Integrale zu approximieren, bei denen die zu integrierende Funktion den Glattheitsanforderungen dünner Gitter nicht entspricht, wurde ein Algorithmus zur adaptiven Verfeinerung des Gitters anhand eines lokalen Kriteriums auf Basis des lokalen Verfeinerungskriteriums und der Graphendarstellung dünner Gitter in [3] entwickelt. Außerdem wurde durch Beschränkung des Funktionsbetrages für singuläre Integranden eine Methode zur Lösung derartiger Integrale gefunden.

Unter Betrachtung der Testreihen aus Abschnitt 4 und ihrem positiven Ergebnis bezüglich Konvergenz, kann die zentrale Frage dieser Arbeit beantwortet werden: Numerische Integration auf dünnen Gittern eignet sich - im Rahmen der erhobenen Daten - dazu, lokale Steifigkeitsmatrizen einer FEM Diskretisierung mit $d$-dimensionalen, rechtwinkligen Elementen zu berechnen.

Dünne Gitter können auch für andere Aufgaben als Integration verwendet werden. So wird in [3] auf einem adaptiven dünnen Gitter die Lösung der Laplacegleichung approximiert. Es kann sinnvoll sein statt der stetigen, stückweise linearen Basisfunktionen komplexere Funktionen zu verwenden. So werden in [2] alternative Basen wie etwa stückweise definierte, stetige Polynome höherer Ordnung und B-Splines erläutert. Hier ist abzuwägen, wie gut die jewelige Basis an die Problemstellung angepasst ist.

Neben der Erweiterung von dünnen Gittern kann auch deren adaptive Verfeinerung durch a-priori Wissen ergänzt werden. Findet man ein lokales Kriterium, mit welchem weitere Aussagen über die Problemstellung getroffen werden können, so kann es im Umkehrschluss auch verwendet werden, um globale Eigenschaften zu erfüllen.

# 6 Verzeichnisse

## Abbildungsverzeichnis


2.1 Eindimensionale Knotenbasis . . . . . 13
2.2 Eindimensionale hierarchische Basis . . . . . 14
2.3 Hierarchischer Überschuss . . . . . 15
2.4 Mehrdimensionale hierarchische Basis . . . . . 17
2.5 Volles und dünnes Gitter ohne Randwertbehandlung . . . . . 18
2.6 Basisfunktionen der Stufe $l = 0$ . . . . . 19
2.7 Volles und dünnes Gitter mit Randwertbehandlung . . . . . 21
2.8 Graph eines klassischen dünnen Gitters . . . . . 22
2.9 Wald eines klassischen dünnen Gitters . . . . . 25
2.10 Interpolierende aus adaptivem Integrationsalgorithmus . . . . . 26
4.1 Testreihe 1: Fehlerbetrag über der Anzahl der Gitterpunkte für Funktionsklasse 1 34
4.2 Testreihe 1: Fehlerbetrag über der Anzahl der Gitterpunkte für Funktionsklasse 2 35
4.3 Testreihe 1: Fehlerbetrag über der Anzahl der Gitterpunkte für Funktionsklasse 3 36
4.4 Testreihe 1: Fehlerbetrag über der Anzahl der Gitterpunkte für Funktionsklasse 4 37
4.5 Testreihe 1: Fehlerbetrag über $L$ für alle Funktionsklassen . . . . . 38
4.6 Testreihe 1: Fehlerbetrag über $\varepsilon$ für alle Funktionsklassen . . . . . 39
4.7 Testreihe 2: Variation von $\gamma$ . . . . . 41
4.8 Testreihe 3: Durchschnittlicher Fehlerbetrag der Matrixkomponenten . . . . . 44


## Tabellenverzeichnis


2.1 Vergleich voller und dünner Gittern . . . . . 19
3.1 Beschreibung der Schnittstellenparameter . . . . . 30
4.1 Testreihe 1: Vertreter der vier Funktionsklassen . . . . . 33


## Quelltextverzeichnis


3.1 Schnittstelle der Softwarebibliothek . . . . . 29

# 7 Literatur


[1] Hans-Joachim Bungartz und Michael Griebel. „Sparse grids“. In: *Acta Numerica* 13 (2004), S. 1–123. (Besucht am 29. 06. 2016).

[2] Dirk Pflüger. „Spatially Adaptive Sparse Grids for High-Dimensional Problems“. Dissertation. München: Institut für Informatik, Technische Universität München, Feb. 2010. ISBN: 9783868535556. URL: `http://www5.in.tum.de/pub/pflueger10spatially.pdf` (besucht am 29. 06. 2016).

[3] Christoph Zenger. „Sparse Grids“. In: *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations*. Hrsg. von Wolfgang Hackbusch. Bd. 31. Notes on Numerical Fluid Mechanics. Vieweg, 1991, S. 241–251. URL: `http://www5.in.tum.de/pub/zenger91sg.pdf` (besucht am 29. 06. 2016).

[4] Bronstein I. N. u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 9. Aufl. Verlag Europa-Lehrmittel, 2013. ISBN: 9783808556719.

[5] Christof Eck, Harald Garcke und Peter Knabne. *Mathematische Modellierung*. Springer-Verlag, 2008. ISBN: 9783540749677.

[6] Christian Großmann und Hans-Görg Roos. *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. 3. Aufl. Teubner Verlag, 2005. ISBN: 351922089X.

[7] Gerhard Opfer. *Numerische Mathematik für Anfänger*. 5. Aufl. Vieweg+Teubner, 2008. ISBN: 9783834804136.

[8] Wolfgang Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. 2. Aufl. Teubner-Studienbücher : Mathematik. Teubner, 1996. ISBN: 3-519-12074-7.